

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. ИВАНОВ

ДИНАМИКА
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
И ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ
В СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 537.8:621.384.6

И 20

Рецензенты: *Н.А. Винокуров*, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры физики ускорителей НГУ, зав. лабораторией ИЯФ СО РАН;
Е.Б. Левичев, д-р физ.-мат. наук, проф., зам. директора ИЯФ СО РАН

Иванов А.В.

И 20 Динамика заряженных частиц и интенсивных пучков в стационарных полях : учеб. пособие / А.В. Иванов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 211 с.

ISBN 978-5-7782-1635-8

Предлагаемое учебное пособие по курсу «Электродинамика заряженных частиц», который автор читает студентам физико-технического факультета НГТУ, содержит наиболее важные вопросы динамики заряженных частиц и интенсивных пучков в стационарных электромагнитных полях. В книге представлен необходимый математический аппарат, приведены основные уравнения электромагнитного поля, подробно рассмотрены аналитические и численные методы расчета электрических потенциалов и полей. Рассмотрено движение заряженных частиц в однородных и слабо неоднородных электрическом и магнитном полях, в полях с аксиальной симметрией. Построено матричное описание движения, рассмотрена динамика частиц в аксиально-симметричных электрических и магнитных линзах, в дуплетах и триплетах квадрупольных линз. Даны определения эмиттанса пучка и аксептанса канала, рассказано о проблемах построения огибающих потока и согласования потока с периодическим каналом. Описаны основные эффекты, возникающие из-за влияния пространственного заряда, в том числе образование виртуальных катодов. Рассмотрено начальное формирование электронных потоков электростатическим полем, описаны источники пучков заряженных частиц с плазменным эмиттером.

Предназначено для студентов ФТФ НГТУ третьего года обучения.

Работа подготовлена на кафедре ЭФУиУ

УДК 537.8:621.384.6

ISBN 978-5-7782-1635-8

© Иванов А.В., 2011

© Новосибирский государственный
технический университет, 2011

1. НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Некоторые сведения из векторного анализа

Если с каждой точкой области пространства, занимающей объем V и ограниченной поверхностью S , связать значение скалярной или векторной величины, то рассматриваемая часть пространства может быть названа *полем* этой величины. Поля могут быть стационарными или изменяться во времени.

Пусть \mathbf{r} есть радиус-вектор текущей точки поля, $\varphi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$, ... – скалярные, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, ... – векторные функции точки области. Вводятся следующие дифференциальные операции.

Градиент скаляра:

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\delta S} \varphi \, dS = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\delta S} (\mathbf{n}_0 \cdot \nabla \varphi) \, dS = \nabla \varphi, \quad (1.1)$$

где δV – малый объем, содержащий точку \mathbf{r} ; δS – замкнутая поверхность, окружающая δV ; \mathbf{n}_0 – единичный вектор внешней нормали к поверхности δS .

Дивергенция вектора:

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\delta S} (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{A}) \, dS = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (1.2)$$

Ротор вектора:

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oiint_{\delta S} (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{A}) \, dS = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (1.3)$$

Последние выражения в вышеприведенных формулах дают запись операций через символический оператор *набла* ∇ , который может быть представлен в независимом от системы координат виде:

$$\nabla \otimes (\dots) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \oint_{\delta S} (\mathbf{n}_0 \otimes \dots) dS,$$

где \otimes надо заменить на знак соответствующей операции.

Если ротор векторного поля равен нулю, то такое поле называют *безвихревым*. Если равна нулю дивергенция векторного поля, то такое поле называют *соленоидальным*. Справедливо следующее *разложение Гельмгольца*: если дивергенция и ротор векторного поля \mathbf{A} определены в каждой точке конечной открытой области пространства V , то всюду в V поле \mathbf{A} может быть представлено в виде суммы безвихревого и соленоидального полей:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,$$

$$\text{rot } \mathbf{A}_1 = 0, \quad \text{div } \mathbf{A}_2 = 0.$$

Любое соленоидальное векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ можно представить в виде ротора некоторого другого векторного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}.$$

Поле \mathbf{B} в этом случае называется *векторным потенциалом* поля \mathbf{A} . Обратное также верно: если поле \mathbf{A} есть ротор какого-либо другого поля, то \mathbf{A} является соленоидальным.

Векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называют *потенциальным*, если существует такое скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$, что

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi.$$

Если поле \mathbf{A} – потенциальное, то

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1).$$

Отсюда, в частности, следует свойство консервативности потенциальных полей:

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Необходимое условие потенциальности векторного поля – равенство нулю ротора поля (т.е. всякое потенциальное поле является безвихревым), однако это условие не достаточно. Безвихревое поле является потенциальным только тогда, когда рассматриваемая область пространства *односвязная*, т.е. когда любые два пути между двумя любыми точками области пространства могут быть непрерывно преобразованы друг в друга.

В векторном анализе важную роль играет *теорема Остроградского–Гаусса*, связывающая поток вектора через замкнутую поверхность с интегралом от дивергенции вектора по ограниченному этой поверхностью объему:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{A}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV. \quad (1.4)$$

Еще одна важная теорема векторного анализа, которая будет использоваться далее, – *теорема Стокса*. Она связывает циркуляцию вектора по замкнутому контуру L с интегралом от ротора вектора, взятого по опирающейся на этот контур поверхности Σ :

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{\Sigma}. \quad (1.5)$$

Формулы (1.1)–(1.3) дают выражения дифференциальных операций первого порядка. Их повторное применение приводит к операциям второго порядка. Одну из них задает символический *оператор Лапласа* (*лапласиан*), представляющий собой скалярное произведение двух операторов набла:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2.$$

Лапласиан скаляра играет важную роль в математике и физике. Он эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции:

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

Уравнение

$$\Delta\varphi = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. Удовлетворяющие ему функции называются *гармоническими*.

Другие соотношения, которыми связаны операции второго порядка:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

Рассмотрим скалярное поле $\varphi = 1/r$. Градиент этого поля равен $\nabla\varphi = -\mathbf{r}/r^3$. Используя теорему Остроградского–Гаусса, вычислим интеграл от лапласиана поля по какому-либо объему V , окруженному замкнутой поверхностью S :

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = \iiint_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{1}{r} dV = \oiint_S \operatorname{grad} \frac{1}{r} \cdot d\mathbf{S} = -\oiint_S \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}}{r^3}.$$

Стоящий справа интеграл определяет полный телесный угол, под которым из точки начала координат видна внутренность замкнутой поверхности S . Его величина равна 4π , если начало координат находится внутри этой поверхности, и нулю – если нет.

Для математического описания подобных ситуаций П.А.М. Дираком была введена специальная функция $\delta(\mathbf{r})$ (*дельта-функция*), обладающая следующими свойствами:

1) $\delta(\mathbf{r}) = 0$, если $\mathbf{r} \neq 0$;

2) $\iiint_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}) dV = f(0)$, если точка $\mathbf{r} = 0$ принадлежит объему V .

С помощью дельта-функции находим

$$\iiint_V \nabla^2 \frac{1}{r} dV = -4\pi \iiint_V \delta(\mathbf{r}) dV,$$

откуда получаем равенство

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (1.6)$$

Функция $1/r$ является, таким образом, гармонической в любой области, не содержащей начало координат. В силу своей простоты она называется фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Все приведенные выше соотношения полностью определяются заданием точки поля и не зависят от системы координат. Однако при решении конкретных задач сами точки поля удобно задавать через координаты какой-либо координатной системы, соответственно необходимо уметь записывать дифференциальные операции в различных системах координат.

В декартовой системе координат положение точки определяется пересечением трех взаимно перпендикулярных плоскостей

$$x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \quad z = \text{const}.$$

Эти три координатные плоскости пересекаются по трем координатным прямым. При изменении положения точки на любой из этих прямых изменяется лишь одна из координат, две другие остаются неизменными.

Определим новые переменные величины x_1, x_2, x_3 при помощи соотношений, позволяющих взаимно однозначно переходить от тройки чисел x, y, z к числам x_1, x_2, x_3 и наоборот:

$$x_1 = x_1(x, y, z), \quad x_2 = x_2(x, y, z), \quad x_3 = x_3(x, y, z).$$

Теперь положение точки можно задавать как пересечение трех *координатных поверхностей* $x_j = \text{const}$, $j = 1, 2, 3$. На линии пересечения двух координатных поверхностей – *координатной линии* – две координаты постоянны и положение точки определяется лишь третьей координатой. Единичные векторы, касательные к координатным линиям и направленные в сторону возрастания меняющейся координаты, называются *ортами* и обозначаются \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$. Наибольшее распространение получили *ортгональные* системы координат, в которых $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ при $i \neq j$ и $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$ при $i = j$. Локальная система координат в каждой точке является при этом декартовой.

Определим, как при малом изменении значений криволинейных координат изменяется радиус-вектор точки. Рассматривая $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ как функцию нескольких переменных, находим

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} dx_3 = H_1 \mathbf{e}_1 dx_1 + H_2 \mathbf{e}_2 dx_2 + H_3 \mathbf{e}_3 dx_3,$$

поскольку из приведенных выше определений следует, что $\partial \mathbf{r} / \partial x_i \parallel \mathbf{e}_i$. Коэффициенты $H_i(x_1, x_2, x_3)$ называются *коэффициентами Ламе*. В ортогональной системе координат квадрат длины смещения точки представляется как

$$d\mathbf{r}^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + H_3^2 dx_3^2. \quad (1.7)$$

Коэффициенты Ламе позволяют записывать дифференциальные операции в ортогональных системах координат:

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{e}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \\ \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (A_3 H_1 H_2) \right], \\ \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial / \partial x_1 & \partial / \partial x_2 & \partial / \partial x_3 \\ A_1 H_1 & A_2 H_2 & A_3 H_3 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В дальнейшем часто будет использоваться цилиндрическая система координат, в которой точка задается числами (r, α, z) . Коэффициенты Ламе этой системы $H_r = 1$, $H_\alpha = r$, $H_z = 1$. В декартовой системе координат $H_x = H_y = H_z = 1$.

Пусть по области пространства, в которой определено скалярное поле φ , проходит кривая линия. Эту кривую можно описать при помощи естественной параметризации: $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, где s – расстояние вдоль кривой, отсчитываемое от некоторой фиксированной

ее точки. При естественной параметризации орт \mathbf{s}_0 , направленный вдоль касательной к кривой, выражается следующим образом:

$$\mathbf{s}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_x \frac{dx}{ds} + \mathbf{e}_y \frac{dy}{ds} + \mathbf{e}_z \frac{dz}{ds}, \quad |\mathbf{s}_0| = 1.$$

Определим производную скалярного поля вдоль кривой:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s + \delta s) - \varphi(s)}{\delta s} = \frac{\delta\varphi}{\delta x} \frac{dx}{ds} + \frac{\delta\varphi}{\delta y} \frac{dy}{ds} + \frac{\delta\varphi}{\delta z} \frac{dz}{ds} = \mathbf{s}_0 \cdot \nabla\varphi = (\mathbf{s}_0 \cdot \nabla)\varphi.$$

Производная векторного поля находится аналогично:

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = (\mathbf{s}_0 \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Пусть рассматриваемая кривая является траекторией частицы, летящей сквозь поле со скоростью $\mathbf{v}(s(t))$. Вычислим, как быстро будет изменяться поле, действующее на частицу (т.е. на его полную производную по времени):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + ((\mathbf{s}_0 \cdot \nabla)\varphi) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\varphi, \quad (1.10)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (1.11)$$

где учтено равенство $\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}_0 = \mathbf{v}$. Первые слагаемые в этих выражениях называются временными, а вторые – конвективными членами.

Более подробное изложение основ векторного анализа можно найти во многих учебниках, (например, в [1]).

1.2. Основные уравнения электромагнитного поля

Электромагнитное поле характеризуется четырьмя векторными величинами:

\mathbf{E} – напряженность электрического поля [В/м];

\mathbf{D} – индукция электрического поля [Кл/м²];

\mathbf{H} – напряженность магнитного поля [А/м];
 \mathbf{B} – индукция магнитного поля [Тл = В·с/м²].
 Векторы поля подчиняются уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.13)$$

Здесь ρ [Кл/м³] – плотность свободных зарядов; \mathbf{j} [А/м²] – плотность тока проводимости. Кроме того, векторы поля связаны между собой и с вектором \mathbf{j} материальными уравнениями, в которых учитываются индивидуальные свойства среды. В линейной изотропной среде эти уравнения принимают следующий вид:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.14)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м и $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – магнитная и электрическая постоянные; μ и ε – магнитная и диэлектрическая проницаемости среды; σ [1/(Ом·м)] – проводимость среды (для меди, например, $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ 1/(Ом·м)). Если параметры среды μ , ε , σ не зависят от векторов поля, то имеет место весьма важный *принцип суперпозиции*: поле, образованное совместным действием нескольких источников, есть сумма полей, созданных каждым источником, действующим отдельно в тех же условиях.

Далее везде рассматривается движение частиц в вакууме, при этом магнитная и диэлектрическая проницаемости равны единице.

Для стационарных полей $\partial/\partial t \equiv 0$, и соотношения (1.12) и (1.13) представляются в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.16)$$

Из задачи нахождения стационарных электрического и магнитного полей можно отдельно выделить два важных частных случая – задачу нахождения электростатического поля неподвижных зарядов, которое полностью описывается выражениями (1.15), и задачу нахождения магнитного поля заданного постоянного тока, описываемого уравнениями (1.16).

Начнем с рассмотрения *электростатического* поля. Поскольку в этом случае $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ всюду, то \mathbf{E} можно представить как градиент скалярного электрического потенциала U :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } U = -\nabla U.$$

Второе уравнение в (1.15) позволяет найти уравнение, которому должен удовлетворять этот потенциал

$$\text{div grad } U = \nabla^2 U = \Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.17)$$

Такое уравнение (уравнение Лапласа с ненулевой правой частью) называется *уравнением Пуассона*.

Из потенциальности электростатического поля следует другое его фундаментальное свойство – консервативность:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Выделим в электростатическом поле объем V , ограниченный замкнутой поверхностью S . Из теоремы Остроградского–Гаусса (1.4) следует:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{D} dV = \iiint_V \rho dV = Q.$$

Эта формула выражает собой *теорему Гаусса*: поток индукции электрического поля через замкнутую поверхность равен заключенному внутри этой поверхности свободному заряду.

Точечный заряд q , размещенный в точке \mathbf{r}' , наводит в точке наблюдения \mathbf{r} потенциал

$$U(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Действительно, если взять лапласиан этого потенциала при помощи формулы (1.6), то можно убедиться, что он является решением уравнения Пуассона. По принципу суперпозиции также можно найти потенциал «облака» зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r}')$:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.18)$$

и потенциал слоя поверхностных зарядов с плотностью $\sigma(\mathbf{r}')$:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Если на поверхности S заряды образуют двойной слой, то их можно представить как слой диполей с поверхностной плотностью дипольных моментов $\boldsymbol{\eta}$, направленной перпендикулярно поверхности. Наводимый ими потенциал равен

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right) dS' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \eta(\mathbf{r}') \frac{\partial'}{\partial n} \left(\frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \right) dS'.$$

Здесь $r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ – расстояние между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' , $\eta > 0$ при совпадении направлений дипольного момента и нормали к поверхности.

Магнитостатическое поле описывается формулами (1.16) при $\mathbf{j} = 0$. В этом случае также можно ввести скалярный магнитный потенциал U^M , который бы описывал напряженность магнитного поля: $\mathbf{B} = -\text{grad } U^M$. Поскольку магнитных зарядов не существует и $\text{div } \mathbf{B} = 0$, то этот потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta U^M = 0$. Решение этой задачи оказывается идентичным решению задачи электростатики.

Магнитное поле постоянного тока описывается формулами (1.16) при $\mathbf{j} \neq 0$. С помощью теоремы Стокса (1.15) получаем

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = I.$$

Это выражение называется *законом полного тока* – циркуляция напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна полному току, проходящему через поверхность, которая опирается на этот контур. Из этого следует, что в случае $\mathbf{j} \neq 0$ ввести для описания магнитного поля однозначный скалярный магнитный потенциал U^M невозможно. Действительно, в этом случае величина

$$\Delta U^M = \int_{\eta}^{\eta_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

зависит не только от начальной и конечной точек, но и от пути между ними. Так, при каждом обходе области с током I к ΔU^M добавляется величина $\mu_0 I$. Такая многозначность побуждает ввести для описания магнитного поля векторный потенциал \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} .$$

Это сделать всегда возможно, поскольку $\text{div } \mathbf{B} = 0$.

Векторный потенциал, введенный выше, определен с точностью до градиента какой-либо скалярной функции. На векторный потенциал можно наложить дополнительные условия, которые позволят однозначно вычислить его для решения тех или иных физических задач. Такой прием называется *калибровкой* векторного потенциала. Существует несколько калибровок, однако для статических задач лучше всего подходит условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 . \tag{1.19}$$

Чтобы найти уравнение, которому должен удовлетворять \mathbf{A} , рассмотрим цепочку равенств

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \text{rot } \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{j} , \quad \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} .$$

С учетом дополнительного условия (1.19) находим искомое уравнение, которое иногда называют векторным аналогом уравнения Пуассона:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} . \tag{1.20}$$

Зная решение уравнения Пуассона (1.18) и опираясь на эту аналогию, можно предугадать решение (1.20) в виде

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} .$$

Важно отметить, что свои векторные качества векторный потенциал заимствует у плотности тока. Пусть, например, \mathbf{j} имеет только одну, отличную от нуля, компоненту: $j_x = j_y = 0$, $j_z \neq 0$. Тогда $A_x = A_y = 0$,

$A_z = A \neq 0$ и «векторный» потенциал на деле оказывается скаляром. Рассмотрим этот случай в качестве примера:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & A \end{vmatrix},$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad B_z = 0.$$

Рассмотрим в плоскости xy линию $A = \text{const}$:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0, \quad \tan \alpha_A = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial A/\partial x}{\partial A/\partial y} = \frac{B_y}{B_x}.$$

Здесь α_A – угол наклона касательной к линии $A = \text{const}$, которая совпадает с линией вектора индукции \mathbf{B} .

Предположим, что в исследуемой области токи отсутствуют. Тогда наряду с векторным потенциалом можно использовать и скалярный потенциал U^M :

$$B_x = -\frac{\partial U^M}{\partial x}, \quad B_y = -\frac{\partial U^M}{\partial y}.$$

Интересно выяснить, имеет ли какое-то описание преимущество перед другим? Обозначим через α_M угол наклона касательной к линии $U^M = \text{const}$:

$$dU^M = \frac{\partial U^M}{\partial x} dx + \frac{\partial U^M}{\partial y} dy = 0,$$

$$\tan \alpha_M = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial U^M/\partial x}{\partial U^M/\partial y} = -\frac{B_x}{B_y}.$$

Отсюда следует

$$\tan \alpha_A \cdot \tan \alpha_M = -1.$$

Из аналитической геометрии известно, что в этом случае семейство линий $U^M = \text{const}$ и $A = \text{const}$ ортогональны друг другу. Таким образом, знание одного из них однозначно определяет другое, оба описания оказываются эквивалентны.

1.3. Аналитические методы расчета электрического поля

Метод функции Грина

Пусть имеется область с объемом V и замкнутой граничной поверхностью S . Поставим для нее задачу Дирихле: на границе S задан потенциал U_S , и требуется найти во всех внутренних точках V потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона: $\Delta U = -\rho/\epsilon_0$. Распределение объемных зарядов $\rho(\mathbf{r})$ также считается заданным. Орт нормали к элементу поверхности \mathbf{n}_0 направлен наружу объема V .

Используемый далее метод функции Грина существенно использует формулу Грина, и удобно начать с ее вывода. Пусть в области определены две скалярные функции φ и ψ . Найдем $\text{div}(\psi \nabla \varphi)$:

$$\nabla(\psi \nabla \varphi) = \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi,$$

вычислим от нее интеграл по объему и применим теорему Остроградского–Гаусса

$$\iiint_V (\nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) dV = \iint_S \psi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Поменяем местами φ и ψ и вновь возьмем интеграл:

$$\iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi) dV = \iint_S \varphi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS.$$

Вычитая второй интеграл из первого, получаем искомую формулу Грина

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

Возвращаясь к задаче Дирихле, выберем входящие в формулу Грина скаляры следующим образом:

$$\varphi = U, \quad \nabla^2 U = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \psi = \frac{1}{r}, \quad \nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}),$$

здесь учтены формулы (1.6) и (1.17).

Пусть точка вычисления потенциала обозначается нештрихованными координатами, а точки, по которым производится интегрирование, – штрихованными. Тогда

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(-\frac{\rho(\mathbf{r}')}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} + 4\pi\delta(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \right) dV' = \\ & = \iint_S \left(\frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S - U_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} \right) dS'. \end{aligned}$$

Так как дельта-функция высекает из интеграла значения в точке, где \mathbf{r}' совпадает с \mathbf{r} , это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} dV' + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S dS' - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S U_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varepsilon_0} dS'. \end{aligned}$$

Здесь первый член есть потенциал заданного распределения объемных зарядов, второй – потенциал простого заряженного слоя с поверхностной плотностью $\sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_S$ и третий – потенциал двойного заряженного слоя с плотностью диполей $\eta = -\varepsilon_0 U_S$.

К сожалению, нормальная производная потенциала на границе неизвестна, и данная формула не решает задачу. Нужна дополнительная информация – предположим, что известна некая функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (функция Грина), обладающая следующими двумя свойствами:

1) во всякой внутренней точке эта функция является суммой двух функций $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \xi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, причем ω гармонична всюду внутри области V , а ξ – всюду, кроме точки вычисления, когда $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$;

2) на граничной поверхности S выполняется равенство $\xi|_S = -\omega|_S$ и $G|_S = G_S = 0$.

В качестве ξ для пространства можно взять функцию

$$\xi = \frac{1}{r}, \quad \nabla^2 \xi = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Вновь обращаясь к формуле Грина и полагая в ней $\varphi = U$, $\psi = \omega = G - \xi$, $\nabla^2 \psi = 0$, находим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \left(G - \frac{1}{r}\right) \rho \, dV' &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G_S - \frac{1}{r}\right) \frac{\partial' U}{\partial n} \Big|_S \, dS' - \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_S U_S \frac{\partial'}{\partial n} \left(G - \frac{1}{r}\right) \Big|_S \, dS'. \end{aligned}$$

Учитывая, что $G_S = 0$, и складывая последнее выражение с формулой для $U(\mathbf{r})$, получаем окончательно

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \, dV' - \frac{1}{4\pi} \iint_S U_S \frac{\partial' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \Big|_S \, dS'.$$

Функция Грина имеет определенный физический смысл, который можно описать в терминах электростатики. Будем считать, что поверхность S рассматриваемой задачи выполнена из тонкой металлической фольги и заземлена. Поместим в точку наблюдения поля точечный заряд $q = 4\pi\epsilon_0$. Тогда на поверхности S появятся индуцированные заряды с поверхностной плотностью σ , причем $\iint_S \sigma \, dS = -q$. Вычислим

потенциал, создаваемый совместным действием точечного заряда и простого заряженного слоя:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \xi + \omega = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Это и есть функция Грина. Она равна сумме двух функций: ω – гармоническая всюду, кроме точек поверхности, и ξ – всюду, кроме точки $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. На границе области она обращается в нуль (граница заземлена).

Хотя для каждой заданной геометрии функция Грина есть решение простой электростатической задачи, ее знание позволяет полностью решить для этой геометрии задачу Дирихле. В качестве примера рассмотрим задачу Дирихле для полупространства: задано распределение потенциала на бесконечной плоскости, необходимо найти распределение потенциала в пространстве над плоскостью. На первом этапе строим функцию Грина, для чего заземлим плоскость $z = 0$, которая является границей области S . Помещаем в точку $M = (x, y, z)$ заряд $q = 4\pi\epsilon_0$. Влияние заземленной плоскости заменяем действием отраженного заряда $-q$, находящегося в точке $\tilde{M} = (x, y, -z)$. Тогда функция Грина есть потенциал, наводимый этими двумя зарядами в точке $N = (x', y', z')$:

$$G(x', y', z') = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}}.$$

Производная по внешней нормали

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{S'} = - \left. \frac{\partial G}{\partial z'} \right|_{z'=0} = \left(- \frac{z-z'}{r_{MN}^3} - \frac{z+z'}{r_{\tilde{M}N}^3} \right) \Bigg|_{z'=0} = - \frac{2z}{r_{MS}^3},$$

где $r_{MS} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$.

Если нет объемных зарядов ($\rho = 0$), то по общей формуле находим решение задачи Дирихле, которое определяется заданным распределением потенциала $U_0(x, y)$ в плоскости $z = 0$:

$$U(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint \frac{U_0(x', y') dx' dy'}{r_{MS}^3}.$$

Метод комплексного потенциала

Рассмотрим плоскости двух комплексных переменных: $z = x + iy = |z| e^{i\alpha}$ и $w = u + iv = |w| e^{i\beta}$. Если существует правило, ставящее в соответствие любому z из области $D(z)$ определенное w из области $D(w)$, то говорят, что задана функция $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ и область $D(z)$ из плоскости z отображается на область $D(w)$ из плоскости w .

Функция $w(z)$ дифференцируема в точке z , если предел

$$w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z}$$

существует и не зависит от характера стремления Δz к нулю. Для дифференцируемости $w(z)$ в точке необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция, дифференцируемая в каждой точке области, называется *аналитической* в этой области. Действительная и мнимая части аналитической функции оказываются зависимы, и одна определяет другую с точностью до постоянной.

Пусть точка z_0 отображается функцией $w(z)$ в точку w_0 . Для окрестности z_0 имеем

$$\Delta w = w(z_0 + \Delta z) - w(z_0) \approx w'(z_0) \Delta z = |w'| e^{i\gamma} \Delta z,$$

т.е. в малом любая аналитическая функция дает растяжение Δz в $|w'| \neq 0$ раз и поворот всей окрестности на угол γ . Этим обеспечивается *конформность*, т.е. сохранение углов между кривыми образа и отображения.

Дифференцируя соотношения Коши–Римана и перенося все налево, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Отсюда следует очень важный для приложений вывод: любую гармоническую в плоской области функцию можно рассматривать либо как действительную, либо как мнимую часть некоторой аналитической в этой области функции.

Поделим друг на друга условия Коши–Римана:

$$\left(\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} \right) \left(\frac{\partial v / \partial x}{\partial v / \partial y} \right) = \tan \alpha_u \tan \alpha_v = -1,$$

где α_u и α_v – углы наклона касательных к линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ в точке их пересечения. Последнее соотношение показывает, что эти линии образуют взаимно ортогональные семейства.

Для описания электростатического поля был введен потенциал U :

$$\mathbf{E} = -\nabla U, \quad E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Введем теперь новую (силовую) функцию V , связав ее условиями Коши–Римана с потенциалом

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = -E_y, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x} = E_x,$$

и составим аналитическую функцию

$$W(x, y) = V(x, y) + iU(x, y) = W(z).$$

Функция $W(z)$ называется *комплексным потенциалом* электростатического поля, а кривые $V = \text{const}$ и $U = \text{const}$ образуют взаимно ортого-

нальную картину силовых и эквипотенциальных линий поля. Знание комплексного потенциала позволяет получить все основные величины, характеризующие поле, например, картину эквипотенциальных поверхностей $U = \text{const}$, вектор напряженности электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(V - iU) = \frac{\partial W^*}{\partial y} = i\frac{dW^*}{dz},$$

поток поля и его энергию, емкость и др.

Наиболее эффективным методом комплексного потенциала оказывается при использовании конформных преобразований. Пусть $w(z)$ осуществляет конформное преобразование плоскости z на плоскость w так, что контуры электродов на плоскости z переходят в контуры электродов на плоскости w . Пусть, кроме того, известен комплексный потенциал $W = W(w)$ системы электродов на плоскости w . Тогда исходный потенциал системы электродов на плоскости z находится по формуле $W = W(w(z))$. Таким образом можно рассчитать поле в некоаксиальном цилиндрическом конденсаторе, вблизи краев плоского конденсатора и т.п.

1.4. Численные методы расчета электромагнитных полей

Несмотря на важность аналитических методов расчета электрических полей, они применимы только для расчета ограниченного числа относительно простых электронно-оптических систем (ЭОС). Большинство же реальных ЭОС рассчитывается численно. Для этого при помощи численных методов необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений в частных производных с заданными краевыми условиями. Важно отметить, что подобные методы также находят широкое применение при расчете задач в области деформации твердых тел, теплопроводности, гидродинамики и т.д.

В настоящее время наиболее широкое распространение получили численные методы на основе интегральных уравнений и на основе метода сеток. Важнейшая идея методов на основе интегральных уравнений заключается в переходе от исходного дифференциального уравне-

ния в частных производных к эквивалентному интегральному уравнению, подлежащему дальнейшим преобразованиям.

Сущность метода сеток состоит в аппроксимации искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитываемых в некоторых точках области – узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции. Применение метода сеток позволяет свести дифференциальную краевую задачу к системе нелинейных в общем случае алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых значений функции.

Метод конечных разностей

Предположим, значения какой-либо функции $f(x)$ заданы в наборе точек (узлов), которые отстоят друг от друга на расстояние h :

$$f(x_0) = y_0, \dots, f(x_n) = y_n,$$

$$x_{i+1} = x_i + h.$$

Конечной разностью первого порядка называют разность между значениями f в двух соседних узлах, т. е.

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Конечной разностью второго порядка называют разность между двумя соседними конечными разностями первого порядка и т. д.

При помощи конечных разностей можно заменять производные их разностными аналогами:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{\Delta y_i}{h} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}.$$

Приведенное выше выражение называют правой схемой. Также можно построить левую и центральную схемы:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}.$$

Сущность метода конечных разностей (МКР), который иногда называют методом сеток или разностным методом, заключается в решении вместо дифференциального уравнения соответствующего ему уравнения в конечных разностях, т.е. замене дифференциальных коэффициентов уравнения их разностными аналогами. Для осуществления этого рассматриваемую область пространства покрывают сеткой с шагом, много меньшим характерных размеров области. Искомая непрерывная функция заменяется совокупностью приближенных значений, рассчитываемых в узлах сетки. В МКР используются, как правило, регулярные сетки, шаг которых либо постоянен, либо меняется по несложному закону.

Рассмотрим этот метод на примере решения задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

на квадратной сетке с шагом h . По заданному распределению потенциала на границе области рассчитывается потенциал узлов на контуре сетки (здесь возможно применение интерполяционных формул). После этого вся область оказывается покрыта сеточными узлами двух типов: граничными, в которых потенциал известен, и внутренними, в которых потенциал необходимо рассчитать.

Рассмотрим произвольный узел сетки (обозначим его цифрой 0) и четырех его соседей (рис. 1.1). Координаты этих узлов равны соответственно $0(x, y)$, $1(x + h, y)$, $2(x, y + h)$, $3(x - h, y)$, $4(x, y - h)$. Выражая вторые производные через конечные разности, для центрального узла находим

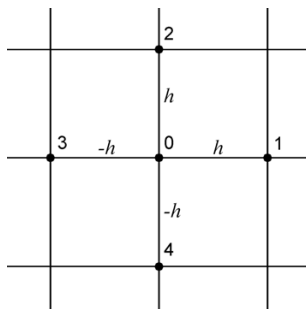


Рис. 1.1. Соседние узлы сетки в методе конечных разностей

$$U_{xx}(x, y) = \frac{U(x + h, y) - 2U(x, y) + U(x - h, y)}{h^2} = \frac{U_1 - 2U_0 + U_3}{h^2},$$

$$U_{yy}(x, y) = \frac{U(x, y+h) - 2U(x, y) + U(x, y-h)}{h^2} = \frac{U_2 - 2U_0 + U_4}{h^2}.$$

Окончательно получаем выражение для потенциала центрального узла через потенциалы его соседей и значение правой части уравнения

$$U_0 = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + U_4}{4} - \frac{h^2 f_0}{4}. \quad (1.21)$$

Это и есть основное расчетное уравнение, аналогичное исходному дифференциальному уравнению (*конечно-разностная схема*).

Сам расчет выполняется методом итераций, для чего все внутренние узлы сетки нумеруются подряд от первого $n=1$ до последнего $n=N$, и в них заносятся какие-то начальные значения потенциалов, например нули. Все внутренние узлы обходятся подряд, и к каждому применяется формула (1.21). Когда будет достигнут последний узел, осуществляется возврат к первому узлу и процесс расчета выполняется вновь. Этот итерационный процесс повторяется до тех пор, пока значения потенциалов при соседних итерациях не станут близки.

Есть две очевидные возможности улучшения и ускорения сходимости описанной схемы. Во-первых, во внутренние узлы в качестве начальных значений следует заносить не нули, а более правдоподобное распределение. Во-вторых, при вычислении нового значения потенциала в каждом узле следует не полностью «принимать на веру» значение, рассчитанное по формуле (1.21), а брать лишь часть от него:

$$U_{i+1} = \rho \cdot U_{calc} + (1-\rho)U_i.$$

Здесь U_i – потенциал в узле на i -й итерации, U_{calc} – рассчитанный по (1.21) потенциал, $0 < \rho \leq 1$ – коэффициент релаксации.

Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) является вариационным методом, в котором решение подбирается (варьируется) так, чтобы наилучшим образом удовлетворить заданным условиям. В его основе лежит *метод взвешенных невязок*, суть которого заключается в следующем: подбирается функция, удовлетворяющая решаемому дифференциальному уравнению и краевым условиям, но подбирается не произвольно, поскольку такой подбор вряд ли возможен уже в двумер-

ном пространстве, а с использованием специальных методов. Пусть необходимо решить задачу:

$$LU + P = 0,$$

$$U(S) = U_S,$$

где L – дифференциальный оператор (например, оператор Лапласа); U – неизвестная функция, которую следует найти; P – величина, не зависящая от U ; $U(S) = U_S$ – условие Дирихле на границе области S .

Будем искать решение с помощью функции, имеющей следующий вид:

$$U^* = F + \sum_{m=1}^M a_m \psi_m, \quad (1.22)$$

где F – функция, удовлетворяющая граничным условиям; ψ_m – пробные функции, которые на границе области должны быть равны нулю; a_m – неизвестные коэффициенты, которые необходимо отыскать из условия наилучшего удовлетворения дифференциальному оператору; M – количество пробных функций. Если подставить U^* в исходный дифференциальный оператор, то получим *невязку*, принимающую в различных точках области разное значение:

$$R = LU^* + P.$$

Необходимо сформулировать условие, позволяющее минимизировать эту невязку по всей области. Одним из вариантов такого условия может быть следующее уравнение:

$$\int_V W_n R \, dV = 0. \quad (1.23)$$

Здесь W_n – некоторые весовые функции, в зависимости от выбора которых различают варианты метода взвешенных невязок.

При выборе в качестве весовых функций дельта-функций получается метод поточечной коллокации, для кусочно-постоянных функций – метод коллокации по подобластям, но наиболее распространенным является метод Галеркина, в котором в качестве весовых функций выбираются пробные функции ψ . В этом случае количество пробных

функций равно количеству весовых функций, и после раскрытия определенных интегралов (1.23) приходим к замкнутой системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_m :

$$KA + Q = 0, \quad (1.24)$$

где A – вектор неизвестных коэффициентов a_m ; коэффициенты матрицы K и вектора Q вычисляются по формулам

$$k_{ij} = \int_V \psi_i L \psi_j dV, \quad q_i = \int_V \psi_i (LF + P) dV.$$

После нахождения коэффициентов a_m и подстановки их в (1.22) получаем решение исходной задачи.

Недостатки метода взвешенных невязок очевидны: поскольку решение ищется сразу по всей области, то количество пробных функций должно быть значительным для обеспечения приемлемой точности. При этом возникают трудности с вычислением коэффициентов k_{ij} и q_i , особенно при решении плоских и объемных задач, когда потребуется вычисление двойных и тройных интегралов по областям с криволинейными границами. Поэтому на практике этот метод не использовался, пока не был разработан метод конечных элементов.

Идея метода конечных элементов заключается в следующем: в методе взвешенных невязок нужно воспользоваться простыми пробными функциями, но не во всей области V , а в ее отдельных подобластях (конечных элементах), и точность решения задачи обеспечивается большим числом конечных элементов. Эти элементы могут быть простой формы, и вычисление интегралов по ним не должно вызывать особых затруднений.

Математически переход от метода взвешенных невязок к МКЭ осуществляется, во-первых, введением определенного количества узлов на каждом конечном элементе; во-вторых, использованием специальных пробных функций, которые также называют базисными функциями. Базисные функции обладают следующими свойствами:

- 1) каждому узлу соответствует своя базисная функция;
- 2) базисная функция отлична от нуля только в конечном элементе, содержащем соответствующий ей узел, во всей остальной области равна нулю;
- 3) в «своем» узле базисная функция равна единице и равна нулю в остальных узлах.

В результате на каждом конечном элементе действует строго определенное число ненулевых базисных функций, и при расчете коэффициентов матрицы K системы (1.24) вместо вычисления интеграла по всей области можно вычислить интегралы по отдельным элементам и сложить их. Процедура сложения получила название *ансамблирование*. Использование базисных функций приводит к тому, что процедура вычисления интегралов по элементам становится достаточно простой и, поскольку в узлах $\psi_m = 1$, коэффициенты a_m приобретают физический смысл, они становятся равными значению вычисляемой функции в узлах. В аппроксимации (1.22) теперь можно отказаться от использования функции F , поскольку удовлетворить граничным условиям можно естественным образом, задавая значения функции U в узлах, расположенных на границе.

Обычно используют конечные элементы треугольной формы. МКЭ выгодно отличается тем, что элементы можно сгустить (использовать более подробное разбиение) в тех местах, где требуется повышенная точность вычислений. На рис. 1.2 приведен пример сетки, образованной границами конечных элементов, которая использовалась при расчете магнитного ротора.

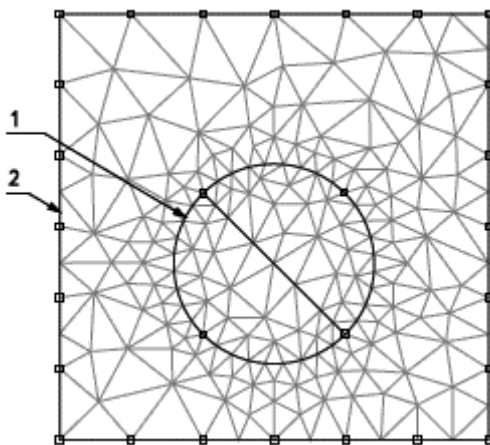


Рис. 1.1. Моделирование дипольного магнитного ротора (1) методом конечных элементов; 2 – ограничивающий контур

Приведенный выше подход к построению МКЭ основан на минимизации невязки. Возможен еще один подход в случаях, когда дифференциальному уравнению можно сопоставить функционал, который минимизируется решением этого уравнения. Например, в электростатической задаче с заданными граничными условиями истинному решению уравнения Лапласа соответствует минимум энергии, запасенной в электрическом поле. Метод Ритца, основанный на подборе функции, которая минимизирует соответствующий функционал, оказывается эквивалентен методу Галеркина.

Метод граничных интегральных уравнений

Методы конечных разностей и конечных элементов, принадлежащие к сеточным методам, дают решение в виде значений потенциала в узлах. В обоих методах сетка должна покрывать все рассчитываемое пространство, никакой информации о пространстве за сеткой получено быть не может. Для вычисления электрического поля требуется численное дифференцирование потенциала, снижающее точность расчетов.

В отличие от сеточных методов используемый при расчете ЭОС метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) дает решение в виде распределения источников поля – поверхностных зарядов. При этом используется общее решение уравнения Пуассона:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Если заданы геометрия электродов и потенциалы на них, а также задано распределение объемного заряда, то для точек, лежащих на поверхности электродов, можно записать:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = U_i - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{r} \in S_i, \quad i = 1 \dots N, \quad (1.25)$$

где U_i – потенциал i -го электрода, S_i – его поверхность, N – полное число электродов. Это выражение можно интерпретировать как интегральное уравнение относительно неизвестного распределения плотности поверхностного заряда. При использовании МГИУ размерность задачи снижается по сравнению с сеточными методами: например, при

расчетах трехмерных систем необходимо найти $\sigma(\mathbf{r})$ на двумерной поверхности электродов.

Существует несколько методов решения интегрального уравнения (1.25). Приведем описание одного из них – метода коллокации с интерполяцией решения. Пусть на поверхности электродов выбран конечный набор точек – узлов коллокации. Попробуем подобрать такое распределение $\sigma(\mathbf{r})$, чтобы в узлах коллокации оно точно удовлетворяло уравнению (1.25). Добиваться этого будем подбором значений σ в узлах коллокации и нахождением $\sigma(\mathbf{r})$ по этим значениям при помощи интерполяции. Это может быть кусочно-постоянная интерполяция, интерполяция полиномами, сплайн-интерполяция и т.д. В любом случае распределение плотности поверхностного заряда на электродах можно представить в виде

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \sigma_k \cdot \psi_k(\mathbf{r}), \quad (1.26)$$

где σ_k – значения плотности заряда в узлах коллокации, $\psi_k(\mathbf{r})$ – интерполяционные формулы, K – полное число узлов коллокации. После подстановки представления (1.26) в интегральное уравнение (1.25) требование точного выполнения этого уравнения в узлах коллокации приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно σ_k :

$$\sum_{k=1}^K a_{mk} \sigma_k = R_m, \quad a_{mk} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\psi_k(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}'|}, \quad m = 1 \dots K,$$

где \mathbf{r}_m – положение узла коллокации с индексом m , R_m – значение в этом узле правой части уравнения (1.25). Эта система может быть решена стандартными численными методами.

После нахождения распределения $\sigma(\mathbf{r})$ можно вычислить потенциал и поле, наводимые поверхностными зарядами в любой точке пространства, рассчитав интегралы

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'.$$

В отличие от сеточных методов в МГИУ расчет поля осуществляется с той же точностью, что и расчет потенциала.

Задания

1.1. Вычислите $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{a} = \text{const}$.

1.2. Пусть в плоскости $z = 0$ диск радиуса R имеет потенциал $U = U_0 \neq 0$, потенциал остальной части этой плоскости $U = 0$. Найти потенциал вдоль оси z .

1.3. Сравните МКР и МКЭ: опишите, чем они похожи и чем различаются.

1.4. Опишите преимущества и недостатки МГИУ по сравнению с сеточными методами.

2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.1. Принцип наименьшего действия

При исследовании эволюции любой динамической системы возможны два подхода, которые связаны либо с векторной механикой Ньютона, либо с аналитической механикой. В первом случае выявляются все силы, действующие на каждую частицу. После этого при заданных начальных условиях движение однозначно определяется из решения системы уравнений

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{F}_k, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где \mathbf{p}_k – механический импульс частицы с номером k , K – число частиц в системе.

В аналитической механике динамическое действие силы описывается кинетической энергией всей системы T , а вместо силы принимается полная потенциальная энергия U . Эти две скалярные функции содержат в себе всю информацию о прошлом и будущем динамической системы любой степени сложности. Чтобы получить эту информацию, надо положить эти функции в основу некоторого фундаментального принципа, описание которого дается ниже. Отметим, что для свободных частиц оба подхода равнозначны, но в сложных системах аналитическая механика имеет серьезные практические преимущества. Кроме того, с нею связаны многие современные понятия и представления, и потому мы будем широко пользоваться ее методами. Материал этой главы следует монографии [2].

Рассмотрим динамическую систему с N степенями свободы, движение которой будем изучать в системе обобщенных координат

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ (такая система называется *конфигурационным пространством*). Составим скалярную *функцию Лагранжа* (лагранжиан) в виде разности кинетической и потенциальной энергий системы:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = T(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - U(\mathbf{x}, t),$$

где $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N)$ – вектор скорости в конфигурационном пространстве. Пусть в достаточно близкие моменты времени t_1 и t_2 система находится в точках $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ конфигурационного пространства, а между этими двумя положениями она движется по определенной траектории $\mathbf{x}(t)$. Введем новую динамическую величину, называемую *действием*:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt.$$

Основной аналитической механики является принадлежащий в окончательной формулировке У.Р. Гамильтону *принцип наименьшего действия*: между начальным $t_1, \mathbf{x}^{(1)}$ и конечным $t_2, \mathbf{x}^{(2)}$ состояниями система движется так, чтобы обеспечить минимум интеграла действия S .

Если $\mathbf{x}(t)$ есть то движение, которое реализуется в природе и обеспечивает минимум действия, то любое другое движение $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, $\delta\mathbf{x}(t_1) = \delta\mathbf{x}(t_2) = 0$ приведет к возрастанию действия S на некоторую величину ΔS :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} [L(\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) + \delta\dot{\mathbf{x}}(t), t) - L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t)] dt = \\ &= \delta S + \delta^2 S + \dots \end{aligned}$$

В соответствии с принципом Гамильтона первая вариация δS должна обратиться в нуль. Это условие дает

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_n} \delta x_n + \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \delta \dot{x}_n \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \delta x_n \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} \right) \delta x_n dt = \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} \right) \delta x_n dt = 0.
\end{aligned}$$

Здесь интеграл взят по частям, первый член в предпоследнем равенстве исчезает, так как начало и конец траектории не варьируются: $\delta x_n(t_1) = \delta x_n(t_2) = 0$.

Поскольку все вариации δx_n , $n = 1, 2, \dots, N$, независимы, для обращения в нуль интеграла должен обратиться в нуль каждый член суммы, что дает систему дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1)$$

решение которой при заданных начальных условиях $x_n(0) = x_{n0}$, $\dot{x}_n(0) = \dot{x}_{n0}$ однозначно определяет динамику системы. Входящие в систему (2.1) уравнения называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа*, а величины

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n}, \quad F_n = \frac{\partial L}{\partial x_n} \quad (2.2)$$

являются *обобщенными импульсами* и *обобщенными силами*. С их помощью уравнения системы (2.1) можно представить в ньютоновой форме:

$$\frac{dP_n}{dt} = F_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Часто из самого вида функции Лагранжа можно извлечь ценную информацию о динамической системе. Предположим, например, что одна из координат (пусть это будет x_1) не входит в лагранжиан: $L = L(x_2, x_3, \dots, x_N, \dot{x}, t)$ (такие координаты называются *циклическими*).

Согласно (2.3), отвечающий этой координате импульс P_1 будет интегралом движения:

$$\frac{dP_1}{dt} = 0, \quad P_1 = \text{const}.$$

Отсюда ясно, что при выборе системы координат следует стремиться к тому, чтобы число циклических координат оказалось максимальным. Если все координаты удалось сделать циклическими, то появляется полный набор N интегралов движения. Такие системы называются полностью интегрируемыми, но они являются исключительными, и типичная динамическая лагранжева система оказывается, как правило, неинтегрируемой.

Рассмотрим подробнее случай, когда время t – циклическая координата (в этом случае $L = L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$), и построим полную производную этого лагранжиана по времени. С учетом (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \frac{d\dot{x}_n}{dt} \right) = \sum_{n=1}^N \left(\dot{x}_n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} + \ddot{x}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n. \end{aligned}$$

Объединяя правую и левую части, находим интеграл движения

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right] = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = H = T + U = \text{const}, \quad (2.4)$$

которым оказывается полная энергия системы (при выводе (2.4) мы учли равенства $L = T - U$ и $\sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n = 2T$).

Для консервативных систем принцип Гамильтона можно переписать в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n - H \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^N P_n dx_n, \quad (2.5)$$

поскольку вариация константы (в данном случае H) равна нулю. Соотношение (2.5) носит название *принципа Мопертюи*, и исторически оно появилось раньше принципа Гамильтона.

2.2. Лагранжиан одиночной частицы, сила Лоренца

Введенная в предыдущем параграфе функция Лагранжа была представлена в виде разности кинетической и потенциальной энергий системы. Такое представление не является универсальным, и лагранжиан для одиночной релятивистской частицы во внешнем стационарном поле имеет вид

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - qU(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Здесь m_0 , q , \mathbf{v} , \mathbf{r} – масса покоя, заряд, скорость частицы и ее радиус-вектор; $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – магнитный векторный потенциал внешнего магнитного поля; $U(\mathbf{r})$ – потенциал внешнего электрического поля; c – скорость света. Выражение (2.6) получено в [3], где также приведено его обобщение. Заметим, что в частном случае нерелятивистской частицы $v \ll c$ и в отсутствие магнитного поля $\mathbf{A} = 0$ мы вновь возвращаемся к лагранжиану в виде разности кинетической и потенциальной энергий $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = m_0 v^2 / 2 - qU(\mathbf{r})$ (появляющаяся при этом постоянная $-m_0 c^2$ может быть отброшена).

Убедимся прежде всего в том, что выражение (2.6) правильно описывает движение частицы в стационарном поле. Перепишем (2.1) в векторной форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (2.7)$$

Обобщенный импульс согласно (2.2) равен

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A},$$

где \mathbf{p} – обычный механический импульс. Обобщенная сила равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \nabla L = q\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - q\nabla U = q[\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]] + \\ + q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} + q\mathbf{E} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Здесь использовано векторное тождество

$$[\mathbf{v} \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Подстановка всех найденных выражений в (2.33) дает

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q\frac{d\mathbf{A}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + q(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Полная производная по времени векторного магнитного потенциала вдоль траектории частицы определяется формулой (1.11). В стационарном поле частной производной по времени не возникает и можно положить $\partial/\partial t \equiv 0$. С учетом этого

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Отсюда получаем уравнение Ньютона для движения одиночной заряженной частицы во внешних полях

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (2.8)$$

Правая часть этого уравнения называется *силой Лоренца*.

В дальнейшем мы будем рассматривать использование электростатических и магнитных полей в качестве линз, фокусирующих пучки заряженных частиц. Эти поля также используются для изменения направления движения (отклонения) частиц (например, в электронно-лучевых трубках). Интересно сравнить силы, действующие на заряженную частицу со стороны электростатического и магнитного полей при одинаковом значении плотности накопленной в них энергии, а также понять, какие существуют практические ограничения.

Поскольку плотность энергии электростатического поля $w_E = (\epsilon_0/2)E^2$, магнитного поля – $w_M = (1/2\mu_0)B^2$, из условия $w_E = w_M$ находим

$$B/E = (\mu_0\epsilon_0)^{1/2} = 1/c.$$

С учетом этого равенства из (2.8) находим отношение сил со стороны электрического и магнитного полей

$$\frac{F_M}{F_E} = \frac{vB}{E} = \frac{v}{c}.$$

Поскольку $v \leq c$, это означает, что для достижения одинаковой фокусирующей или отклоняющей силы в случае использования магнитного поля необходима большая плотность запасенной энергии. Однако на практике величина электрического поля практически всегда ограничена электрической прочностью установки. В статическом случае величина максимального поля приблизительно составляет 10 МВ/м. Максимальная величина магнитного поля, создаваемого электромагнитами с железным сердечником, определяется насыщением железа и составляет приблизительно 2 Тл. При данных максимальных полях для частицы со скоростью $v = 0,1c$ отношение сил $F_M/F_E = 6$ – магнитное поле оказывается гораздо более эффективным. С другой стороны, при скорости $v = 0,01c$ отношение $F_M/F_E = 0,6$, следовательно, при малых скоростях частиц электрическое поле более эффективно. Отметим, что поле сверхпроводящих соленоидов может превышать 10 Тл. Так, проектная величина поля дипольных магнитов ускорителя ЛНС составляет 8,2 Тл.

2.3. Энергия частицы в стационарном поле

Напомним используемые в релятивистской механике обозначения:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Коэффициент γ называется *релятивистским фактором* (или *Лоренц-фактором*). Импульс и полная энергия релятивистской частицы с массой покоя m_0 выражаются следующим образом:

$$E = E_0 + W = \gamma m_0 c^2, \quad \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} = \beta E/c, \quad (2.9)$$

где $E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя частицы, W – ее кинетическая энергия. Квадрат энергии покоя есть релятивистский инвариант

$$E_0^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = \text{const},$$

дифференцирование которого по времени с учетом (2.9) позволяет найти скорость изменения полной энергии частицы:

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Умножая уравнение (2.8) скалярно слева на вектор скорости частицы \mathbf{v} , находим

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dE}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + q\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Заметим, что второй член справа равен нулю (векторы \mathbf{v} и $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ взаимно перпендикулярны) и потому магнитное поле никакого вклада в изменение энергии частицы не дает (его роль сводится к искривлению траекторий). Последнее соотношение с учетом формулы (1.10) для скорости изменения электростатического потенциала вдоль траектории частицы позволяет найти релятивистский закон сохранения энергии частицы в стационарном поле:

$$\frac{d}{dt}(E + qU) = 0, \quad E + qU = \text{const}.$$

Поскольку потенциал может быть определен с точностью до произвольной постоянной, можно положить, что при $U = 0$ частица покоится. Закон сохранения энергии принимает при этом вид

$$W + qU = 0. \quad (2.10)$$

Зная кинетическую энергию частицы, можно легко рассчитать ее релятивистский фактор. Действительно, поскольку $W = E - E_0 = E_0(\gamma - 1)$, то

$$\gamma = 1 + W/E_0.$$

В дальнейшем нам часто будет встречаться произведение $\gamma\beta$, представляющее собой нормированный релятивистский импульс. Через кинетическую энергию он выражается как

$$\frac{p}{m_0c} = \gamma\beta = \sqrt{\frac{W}{E_0} \left(2 + \frac{W}{E_0} \right)}.$$

Соответственно, нормированная скорость частицы равна

$$\beta = \sqrt{\frac{W}{E_0} \left(2 + \frac{W}{E_0} \right)} \bigg/ \left(1 + \frac{W}{E_0} \right). \quad (2.11)$$

В нерелятивистском пределе $W \ll E_0$, и релятивистские коэффициенты приближенно равны

$$\gamma \approx 1, \quad \beta \approx \sqrt{2W/E_0}. \quad (2.12)$$

При изучении динамики заряженных частиц энергию часто выражают в электронвольтах. Один электронвольт равен энергии, на которую изменится энергия электрона при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Основными частицами, с которыми нам придется иметь дело, являются электрон и протон. Их энергии покоя равны $511,00 \cdot 10^3$ эВ для электрона и $938,27 \cdot 10^6$ эВ для протона.

Часто известна не кинетическая энергия частицы, а потенциал U точки пространства, где она находится. В этом случае удобно ввести величину

$$U_E = -m_0c^2/q, \quad (2.13)$$

которая имеет размерность потенциала. Для электрона $U_E = 511,00 \cdot 10^3$ В, для протона $U_E = -938,27 \cdot 10^6$ В. С использованием закона (2.10) входящее в приведенные выше формулы отношение W/E_0 можно записать как

$$W/E_0 = U/U_E.$$

2.4. Уравнения движения частицы в различных системах координат

Большим преимуществом аналитической механики является возможность легко получать уравнения движения в любой криволинейной системе координат, для чего следует записать в этой системе входящие в (2.6) величины \mathbf{v} , \mathbf{A} , U и провести соответствующее дифференцирование. Практически, однако, удобно поступить иначе. Запишем уравнения движения (2.1), используя только первый член L_0 лагранжиана (2.6) (он описывает движение свободной частицы и потому называется *инерциальным*), а затем прибавим к правой части компоненты обобщенной силы.

В декартовой системе координат инерциальный член имеет вид $L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) / c^2}$, в него входят только компоненты скорости и не входят координаты и потому второе слагаемое в (2.1) «не работает»: $\partial L_0 / \partial x_n = 0$. Поскольку обобщенная сила записывается как $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, окончательно в декартовых координатах получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{x}) &= qE_x + q(\dot{y}B_z - \dot{z}B_y), \\ \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{y}) &= qE_y + q(\dot{z}B_x - \dot{x}B_z), \\ \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{z}) &= qE_z + q(\dot{x}B_y - \dot{y}B_x). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Перейдем к цилиндрической системе координат. Квадрат скорости можно найти, поделив квадрат элемента дуги $dl^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2$ (выражается из (1.7)) на dt^2 , что позволяет найти инерциальную часть лагранжиана:

$$L_0 = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}.$$

Поскольку теперь L_0 содержит координату r , то в левой части уравнения появляется «сила» $\partial L_0 / \partial r$, в данном случае это центробежная сила. Все такого рода «силы» оказываются записаны в лагранжиане через его зависимость от координат, при дифференцировании они выявляются автоматически и их не обязательно (как в методе Ньютона) знать заранее.

Используя при вычислении обобщенной силы запись векторного произведения в цилиндрической системе координат ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_z$ – координатные орты)

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\alpha & \mathbf{e}_z \\ \dot{r} & r\dot{\alpha} & \dot{z} \\ B_r & B_\alpha & B_z \end{vmatrix},$$

получаем полную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{r}) &= \gamma m_0 r \dot{\alpha}^2 + qE_r + q(r\dot{\alpha}B_z - \dot{z}B_\alpha), \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(\gamma m_0 r^2 \dot{\alpha}) &= qE_\alpha + q(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z), \\ \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{z}) &= qE_z + q(\dot{r}B_\alpha - r\dot{\alpha}B_r). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Появление множителя $1/r$ в левой части второго уравнения системы (2.15) связано с тем, что вторая координата α есть угол и отвечающая ей компонента обобщенной силы есть на самом деле момент силы и мы поделили обе части уравнения на r .

2.5. Движение заряженной частицы в однородных стационарных полях

Применим систему уравнений (2.14) для анализа общего случая движения нерелятивистского ($\gamma \approx 1$) электрона (с зарядом $q = -e$) при одновременном воздействии стационарных однородных электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей. Обозначаем отношение заряда к массе

покоя (удельный заряд) через $\eta = e/m_0$. Декартовую систему координат можно ориентировать так, как показано на рис. 2.1. При этом компоненты полей станут равны

$$E_x = E \sin \theta, \quad E_y = 0, \quad E_z = E \cos \theta, \quad B_x = B_y = 0, \quad B_z = B.$$

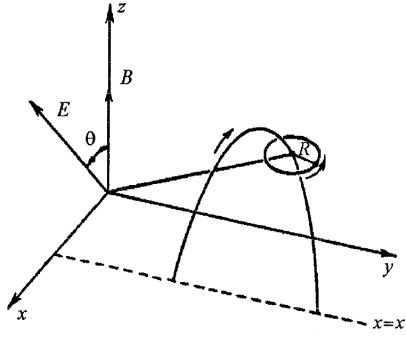


Рис. 2.1. Траектория электрона в однородных электрическом и магнитном полях

Система (2.14) принимает при этом вид

$$\ddot{x} = -\eta(E_x + B\dot{y}), \quad \ddot{y} = \eta B\dot{x}, \quad \ddot{z} = -\eta E_z. \quad (2.16)$$

После первого интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\eta(E_x t + B y) + C_1, \quad \dot{y} = \eta B x + C_2, \\ \dot{z} &= -\eta E_z t + C_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставляя выражение \dot{y} из (2.17) в первое уравнение (2.16), находим

$$\ddot{x} + (\eta B)^2 \left(x + \frac{E_x}{\eta B^2} + \frac{C_2}{\eta B} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Введем новую переменную

$$\xi = x + \frac{E_x}{\eta B^2} + \frac{C_2}{\eta B},$$

которая отличается от x сдвигом на постоянную величину, тогда уравнение (2.18) примет вид уравнения гармонического осциллятора

$$\ddot{\xi} + \omega_c^2 \xi = 0$$

с частотой $\omega_c = \eta B$, которая называется *циклотронной частотой*. Решение последнего уравнения имеет вид $\xi(t) = R \sin(\omega_c t + \varphi)$, где R , φ – новые постоянные интегрирования. Возвращаемся в нем к прежней переменной и тем самым получаем решение $x(t)$. Это позволяет найти $y(t)$ из первого уравнения (2.17). Интегрируя третье уравнение (2.17), получаем $z(t)$. Полное решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= R \sin(\omega_c t + \varphi) - \frac{\eta E_x}{\omega_c^2} - \frac{C_2}{\omega_c}, \\ y(t) &= -R \cos(\omega_c t + \varphi) - \frac{\eta E_x}{\omega_c} t + \frac{C_1}{\omega_c}, \\ z(t) &= -\frac{\eta E_z}{2} t^2 + C_3 t + C_4. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Шесть постоянных интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, R, \varphi$ определяются по начальным условиям $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Анализ решения (2.19) показывает, что движение электрона можно представить как сумму двух независимых движений. Первое из них есть движение по параболе, лежащей в плоскости $x = -(\eta E_x + C_2 \omega_c) / \omega_c^2 = \text{const}$, второе – равномерное вращение по окружности радиуса R в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю (оси z). Вращение называется *ларморовским вращением*, его замечательным свойством является то, что в нерелятивистском случае его частота $\omega_c = \eta B$ не зависит от скорости частицы. Соответственно, период обращения равен $T = 2\pi / \omega_c$. Таким образом, истинная траектория – сложная спираль, образуемая ларморовским вращением, ведущий центр которого перемещается по параболе (рис. 2.1). Рассмотрим некоторые частные случаи.

Однородное магнитное поле

Рассмотрим случай $\mathbf{E} = 0$. В этом случае система (2.19) принимает вид

$$x(t) = R \sin(\omega_c t + \varphi) - \frac{C_2}{\omega_c}, \quad y(t) = -R \cos(\omega_c t + \varphi) + \frac{C_1}{\omega_c},$$

$$z(t) = C_3 t + C_4.$$

Траектория частицы представляет собой спираль с постоянным шагом, направленную вдоль магнитного поля. Эту спираль образуют ларморовское вращение и равномерное движение ведущего центра этой окружности вдоль магнитного поля. Радиус вращения можно найти, если разложить скорость частицы \mathbf{v} на компоненту \mathbf{v}_{\parallel} , продольную магнитному полю, и компоненту \mathbf{v}_{\perp} , перпендикулярную ему (рис. 2.2). При вращении по окружности сила Лоренца уравновешивается центробежной силой:

$$ev_{\perp} B = m_0 v_{\perp}^2 / R_L.$$

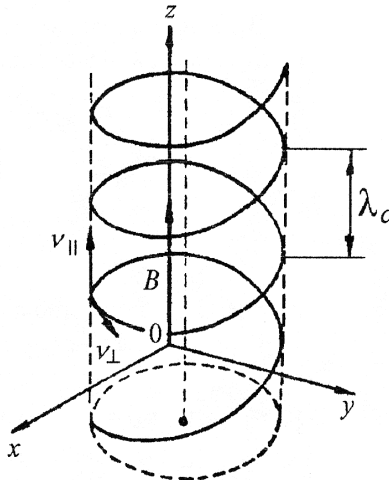


Рис. 2.2. Траектория электрона в однородном магнитном поле

Отсюда радиус окружности (его называют *ларморовским радиусом*)

$$R_L = \frac{m_0 v_{\perp}}{eB} = \frac{p_{\perp}}{eB} = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega_c}.$$

Шаг спирали (*циклотронная длина волны*)

$$\lambda_c = T v_{\parallel} = 2\pi v_{\parallel} / \omega_c.$$

Заметим, что эти результаты справедливы и для релятивистского случая, при этом необходимо заменить m_0 на γm_0 . Тогда циклотронная частота будет уже зависеть от кинетической энергии частицы W :

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m_0} = \frac{1}{1 + W/E_0} \frac{eB}{m_0},$$

где E_0 – энергия покоя частицы.

То обстоятельство, что период обращения не зависит от v_{\perp} , но зависит от поля B , приводит к эффекту так называемой «фокусировки однородным магнитным полем». Пусть электронно-лучевая трубка помещена в параллельное ее оси однородное магнитное поле B и пушка, расположенная внутри трубки на расстоянии D от экрана, испускает электроны с различными поперечными скоростями $v_{\perp} \ll v_{\parallel}$ (рис. 2.3). Можно подобрать величину B так, чтобы через время $T = 2\pi m_0 / eB$ электроны сфокусировались в точку на экране, т.е. чтобы выполнялось равенство $D = T v_{\parallel}$. Именно таким путем в свое время было проведено первое точное измерение отношения заряда к массе для электрона.

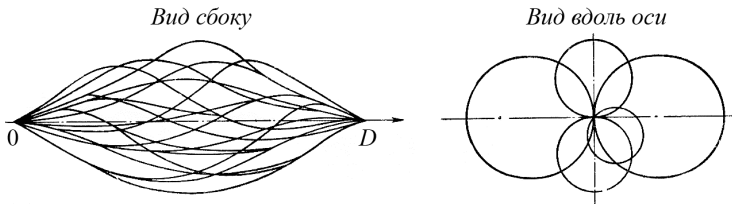


Рис. 2.3. Фокусировка в однородном продольном магнитном поле

Если $v_{\parallel} = 0$, $v_{\perp} = v$, то все движение происходит в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , и траектория электрона представляет собой окружность радиусом $R = \gamma m_0 v / eB$. Именно так в первом приближении движется равновесная частица в кольцевом ускорителе. Величину BR называют «жесткостью» частицы:

$$BR = \frac{\gamma m_0 v}{e} = \frac{m_0 c^2}{ec} \gamma \beta.$$

Движение в параллельных электрическом и магнитном полях

При $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ компоненты электрического поля имеют вид $E_x = 0$, $E_z = E$. По сравнению с рассмотренным выше случаем изменится движение вдоль оси z :

$$z(t) = -\frac{\eta E}{2} t^2 + C_3 t + C_4.$$

Траектория частицы по-прежнему представляет собой спираль с постоянным радиусом, образованную ларморовским вращением и движением ведущего центра вдоль магнитного поля. Однако частица в этом случае ускоряется (или замедляется) вдоль оси z , движение ведущего центра становится равноускоренным, и шаг спирали будет изменяться.

Движение в перпендикулярных полях

Рассмотрим случай $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Тогда движение по оси z линейно и никак не связано с движением по x и по y . Можно исключить это движение из рассмотрения, приняв $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$. Пусть $x_0 = y_0 = 0$, тогда оставшиеся четыре постоянные интегрирования определяются из условий

$$R \sin(\varphi) - \frac{\eta E}{\omega_c^2} - \frac{C_2}{\omega_c} = 0, \quad -R \cos(\varphi) + \frac{C_1}{\omega_c} = 0,$$

$$R \omega_c \cos(\varphi) = \dot{x}_0, \quad \omega_c R \sin(\varphi) - \frac{\eta E}{\omega_c} = \dot{y}_0.$$

Уравнения траектории принимают вид

$$x(t) = \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_c} + \frac{\eta E}{\omega_c^2} \right) (\cos(\omega_c t) - 1) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t),$$

$$y(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_c} + \frac{\eta E}{\omega_c^2} \right) \sin(\omega_c t) - \frac{\eta E}{\omega_c} t.$$

Траектории такого типа называются трохоидами. Если катить без проскальзывания окружность по прямой, то точка на окружности опишет циклоиду, точка на большем радиусе – удлинненную циклоиду, а на меньшем – укороченную. Все они при $\dot{z}_0 = 0$ лежат в плоскости xy , их вид определяется величиной и направлением начальной скорости (рис. 2.4). Заметим, что движение электронов в скрещенных полях широко используется во многих приборах СВЧ, в частности в магнетронах, применяемых в качестве источника СВЧ в микроволновых печах.

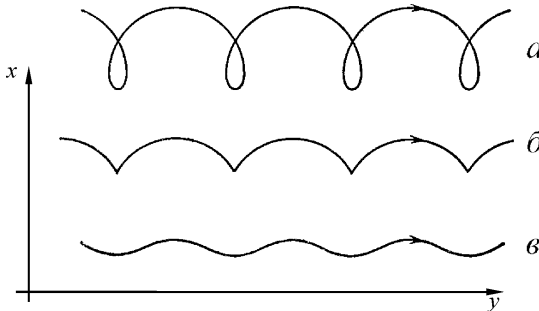


Рис. 2.4. Траектории заряженных частиц в скрещенных электрическом и магнитном полях:
a – укороченная циклоида; *b* – циклоида; *c* – удлинненная циклоида

Равномерное движение ведущего центра ларморовского вращения, вызванное действием электрического поля, называется *электрическим дрейфом*. Дрейф направлен как поперек \mathbf{B} , так и поперек \mathbf{E} . Может вызвать удивление тот факт, что наличие действующей на частицу

постоянной силы приводит не к ускоренному движению вдоль направления этой силы (как это было в случае $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$), а к равномерному движению вбок от нее. Рассмотрим ларморовское вращение положительно заряженной частицы при наложении электрического поля (рис. 2.5). Так как при перемещении частицы вверх поле \mathbf{E}_\perp совершает над ней положительную работу, то скорость частицы в верхнем положении A будет больше, чем в нижнем положении B . Это обстоятельство приводит к тому, что радиус кривизны траектории в верхней части увеличивается, а в нижней – уменьшается. В результате окружность перейдет в незамкнутую кривую, двигаясь по которой, частица будет медленно перемещаться вправо. Это перемещение и есть электрический дрейф. Можно показать, что отрицательно заряженная частица также дрейфует вправо, т. е. направление электрического дрейфа не зависит от знака заряда частицы. Скорость электрического дрейфа в общем случае

$$\mathbf{v}_e = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Интересно отметить, что если постоянная сила, действующая на частицу, не зависит от знака ее заряда, то направление возникающего при этом дрейфа будет различаться для положительно и отрицательно заряженных частиц.

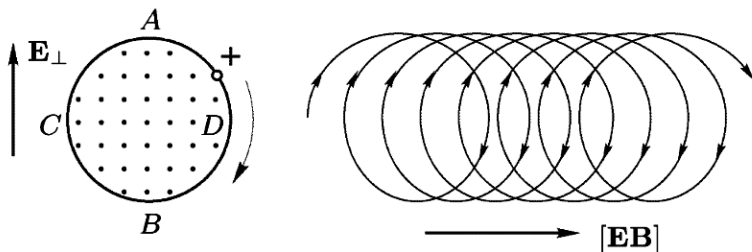


Рис. 2.5. Электрический дрейф в скрещенных полях:
поле \mathbf{B} направлено к читателю

Сейчас можно заключить, что парабола, по которой движется ведущий центр ларморовской окружности в общем случае, изображенном на рис. 2.1, образована равноускоренным движением вдоль \mathbf{B} , вызванным наличием компоненты \mathbf{E} , сонаправленной с \mathbf{B} , и равномер-

ным движением поперек \mathbf{B} , вдоль $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, вызванным электрическим дрейфом.

Отметим, что при $\dot{z}_0 = 0$ и $\dot{y}_0 = -E/B$ электрическая и магнитная силы точно равны и противоположны по знаку и частица с такими параметрами идет строго вдоль оси y , «не замечая» этих полей. Это обстоятельство используется при создании на базе скрещенных полей монохроматоров скоростей.

Движение в однородном электрическом поле

Направим ось x вдоль \mathbf{E} . Мы знаем, что траектория будет лежать в некоторой плоскости, пусть это будет плоскость xu (принимаяем $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, что исключает движение по z). Начальное положение частицы в начале координат $x_0 = y_0 = 0$, и в начальный момент времени скорости равны \dot{x}_0, \dot{y}_0 . Решая систему (2.16), находим

$$x(t) = -\frac{\eta E}{2} t^2 + \dot{x}_0 t, \quad y(t) = \dot{y}_0 t,$$

и движение оказывается инфинитным по обеим координатам. Его нельзя получить предельным переходом $B \rightarrow 0$ из (2.19). Наличие сколь угодно слабого, но конечного магнитного поля качественно меняет движение, превращая его из инфинитного в финитное по одной из координат.

При исключении из этих соотношений времени получаем известный из школьного курса физики результат:

$$x = -\frac{\eta E}{2\dot{y}_0^2} y^2 + \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} y.$$

Интересно отметить, что траектория релятивистского электрона представляет собой цепную линию:

$$x = \frac{\sqrt{E_0^2 + c^2 p_0^2}}{qE} \cosh\left(\frac{qEy}{cp_0}\right), \quad (2.20)$$

где компоненты начального импульса $p_x(0) = 0$, $p_y(0) = p_0$. В нерелятивистском пределе это выражение переходит в параболу.

2.6. Движение заряженной частицы в слабо неоднородном магнитном поле

Дрейфовая теория

В предыдущем параграфе было рассмотрено движение заряженной частицы в однородных электрическом и магнитном полях. Было показано, что движение частицы можно представить как сумму двух независимых движений: ларморовского вращения по окружности с неизменным радиусом в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и движения ведущего центра этой окружности. Если перпендикулярная магнитному полю компонента электрического поля равна нулю, то ведущий центр движется строго вдоль магнитного поля, в противном случае появляется электрический дрейф – равномерное движение ведущего центра вбок от магнитного поля.

В общем случае, когда магнитное и электрическое поля неоднородны, движение частицы приобретает весьма сложный характер. Проинтегрировать уравнения движения в аналитической форме можно только в отдельных случаях, и для расчета траекторий частиц приходится обращаться к численным методам. Есть, однако, случай, когда можно нарисовать сравнительно простую и обозримую картину движения. Это будет тогда, когда магнитное поле сильное, а его изменение в пространстве происходит медленно. На магнитное поле может накладываться слабое электрическое поле. При этих условиях задача приближенно решается по методу последовательных приближений. В нулевом приближении полностью пренебрегают электрическим полем, а также неоднородностью магнитного поля. Движение частицы представляется как быстрое ларморовское вращение, центр которого перемещается вдоль магнитной силовой линии.

Электрическое поле и неоднородность магнитного поля учитываются в первом приближении. Они проявляются в том, что наряду с движением вдоль магнитной силовой линии центр ларморовского кружка получает дополнительное медленное дрейфовое движение вбок от \mathbf{B} , с одной силовой линии на другую. Параметры движения – циклотронная частота ω_c , ларморовский радиус R_L , модули продольной v_{\parallel} и поперечной v_{\perp} скоростей частицы при этом будут медленно меняться. Медленность означает, что за циклотронный период $T = 2\pi/\omega_c$ изменения этих параметров будут малы по сравнению со значениями самих параметров. Для этого необходимо, чтобы на протяжении обо-

рота по ларморовской окружности и в течение циклотронного периода магнитное поле изменялось мало. Такие условия называются условиями адиабатичности, их можно записать как

$$T \frac{1}{B} \left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right| \ll 1, \quad R_L \frac{|\nabla B|}{B} \ll 1. \quad (2.21)$$

При выполнении этих условий можно усреднить движение частицы по времени порядка циклотронного периода. Тогда вместо движения самой частицы останется усредненное, или сглаженное, движение ее ведущего центра. Теория, рассматривающая движение частицы в такой постановке, называется *дрейфовой*.

В первом (линейном) приближении скорость дрейфового движения ведущего центра будет определяться электрическим полем \mathbf{E} и первой производной вектора \mathbf{B} . Изменение магнитного поля в пространстве складывается из изменения его по абсолютной величине и из изменения по направлению. В соответствии с этим дрейфовое движение можно разложить на три движения:

- 1) дрейф под действием электрического поля, или *электрический дрейф*;
- 2) дрейф, вызванный изменением магнитного поля только по абсолютной величине, или *градиентный дрейф*;
- 3) дрейф, вызванный изменением магнитного поля только по направлению (т.е. искривлением магнитных силовых линий) – *центробежный дрейф*.

Скорости всех этих дрейфов в линейном приближении можно вычислить независимо.

Электрический дрейф был рассмотрен в предыдущем параграфе.

Градиентный дрейф имеет схожее с электрическим дрейфом происхождение. Неоднородность магнитного поля по величине приводит к тому, что частица в различные моменты своего ларморовского вращения оказывается в точках с разной величиной B . Вследствие этого кривизна ее траектории в различных точках различается (в большем магнитном поле радиус кривизны меньше, и наоборот), окружность перейдет в незамкнутую кривую, двигаясь по которой, частица будет медленно перемещаться вбок как от \mathbf{B} , так и от ∇B (рис. 2.6). Скорость градиентного дрейфа

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{1}{2} \frac{\gamma m_0 v_\perp^2}{q} \frac{[\mathbf{B} \times \nabla B]}{B^3}.$$

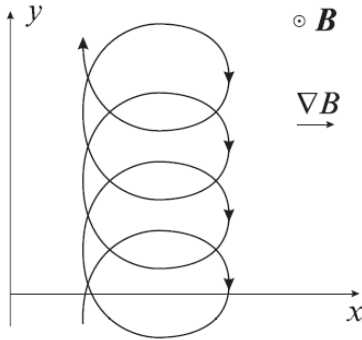


Рис. 2.6. Градиентный дрейф

Центробежный дрейф можно интерпретировать как дрейф, вызванный присутствием центробежной силы инерции. Его скорость

$$\mathbf{v}_c = \frac{\gamma m_0 v_{\parallel}^2}{q} \frac{1}{B^2} \left[\mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} \right],$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{B}/B$ – единичный вектор, направленный по касательной к силовой линии магнитного поля. Согласно одной из формул Френе

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор, направленный по нормали к силовой магнитной линии; R – радиус ее кривизны. При отсутствии токов, когда $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, направления градиентного и центробежного дрейфов совпадают, поскольку при этом $[\mathbf{B} \times \nabla B] = B[\mathbf{B} \times \partial \mathbf{h} / \partial s]$.

Заметим, что в отличие от электрического градиентный и центробежный дрейфы зависят от знака заряда частицы.

Адиабатический инвариант

Дрейфовое движение, описанное выше, дает представление о движении заряженной частицы в направлении, перпендикулярном силовой линии магнитного поля. Между тем неоднородность магнитного поля влияет и на продольное движение.

Движущаяся по ларморовской окружности заряженная частица эквивалентна магнитному диполю с моментом, равным произведению тока на площадь окружности:

$$\mu = IS = \frac{qv_{\perp}}{2\pi R_L} \pi R_L^2 = \frac{m_0 v_{\perp}^2}{2B} = \frac{W_{\perp}}{B},$$

где v_{\perp} , W_{\perp} – перпендикулярные к полю скорость и кинетическая энергия частицы. Неоднородное магнитное поле действует на диполь с силой

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B. \quad (2.22)$$

Пусть частица движется в сторону усиления поля, где силовые линии сгущаются (рис. 2.7, *a*). Если направить ось z вдоль касательной к силовой линии, вокруг которой осуществляется ларморовское вращение, вектор силы (2.22) будет иметь только одну ненулевую компоненту $F_z = -\mu dB/dz$. Эта действующая на диполь сила совершает работу $F_z dz = -\mu dB = dW_{\parallel}$, которая изменяет продольную энергию частицы. Поскольку полная энергия частицы $W = W_{\parallel} + W_{\perp} = \text{const}$ является абсолютным инвариантом движения, поперечная энергия (энергия ларморовского вращения) должна измениться на такую же величину, но с противоположным знаком, т.е. неоднородное магнитное поле изменяет скорость продольного движения частицы, «перекачивая» энергию из W_{\parallel} в W_{\perp} . Это дает соотношение

$$dW_{\perp} = -dW_{\parallel} = \mu dB = \frac{W_{\perp}}{B} dB,$$

откуда и получается окончательный результат

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{p_{\perp}^2}{2m_0 B} = \text{const}. \quad (2.23)$$

Магнитный момент частицы оказывается адиабатическим инвариантом и сохраняется тем точнее, чем лучше выполняется критерий (2.21). Это верно и в релятивистском случае, необходимо только в (2.23) использовать релятивистское выражение для p_{\perp} . Можно показать, что свой адиабатический инвариант можно сопоставить

каждой степени свободы динамической системы, по которой она совершает колебательное движение с медленно изменяющимся параметром.

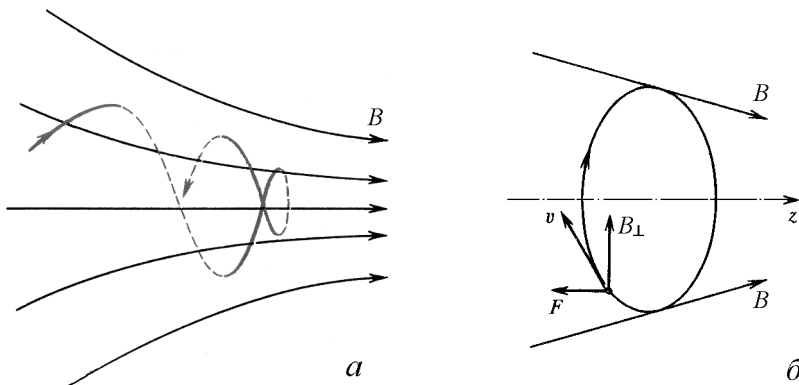


Рис. 2.7. Отражение частицы от области более сильного магнитного поля (а) и происхождение действующей на частицу в неоднородном магнитном поле продольной силы (б)

Формула (2.22) показывает, что частица всегда выталкивается из области более сильного поля. Это можно наглядно продемонстрировать, если рассмотреть картину силовых линий неоднородного магнитного поля вблизи ларморовской окружности (рис. 2.7, б). В таком поле присутствует компонента B_{\perp} , которая и порождает продольную силу. Нетрудно убедиться, что эта сила направлена в противоположную направлению сгущения силовых линий сторону.

Ловушка Будкера

Одно из основных направлений в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу связано с использованием для длительного удержания частиц так называемых открытых ловушек с магнитными пробками, предложенных Г.И. Будкером. Схема такой ловушки показана на рис. 2.8. Когда была снята завеса строгой секретности с работ по термоядерному синтезу, выяснилось, что подобное открытие было независимо сделано американским физиком Р. Постом.

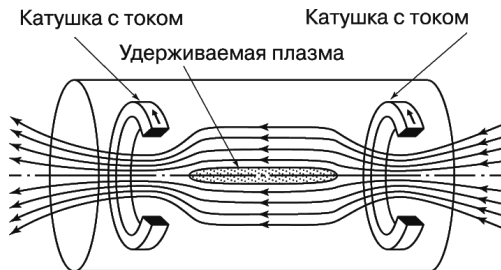


Рис. 2.8. Ловушка с магнитными пробками

Если ввести угол α между вектором скорости и силовой линией магнитного поля, то $v_{\perp} = v \sin \alpha$ и инвариант (2.22) можно переписать как

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{const}.$$

Здесь учтено, что полная скорость $v = \text{const}$. Поскольку минимальная индукция B_0 имеет место в плоскости симметрии (медианной плоскости) ловушки, а максимальная индукция B_m – в магнитных пробках, последнее равенство дает

$$\frac{\sin \alpha_0}{\sqrt{B_0}} = \frac{\sin \alpha_m}{\sqrt{B_m}}, \quad \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{B_0}{B_m}} \sin \alpha_m,$$

где величина B_m/B_0 называется пробочным отношением. Если выполнено условие

$$\sin \alpha_0 > \sqrt{\frac{B_0}{B_m}},$$

то частицы оказываются запертыми в ловушке, попеременно отражаясь от магнитных пробок.

В заключение отметим, что открытую магнитную ловушку образует магнитное поле Земли. Это так называемый радиационный пояс, или пояс Ван-Аллена. В первом приближении радиационный пояс состоит из двух областей: внутренний радиационный пояс на высоте примерно 4000 км, состоящий преимущественно из протонов с энергией в десятки мегаэлектронвольт, и внешний пояс на высоте примерно 17 000 км, состоящий преимущественно из электронов с энергией в

сотни килоэлектронвольт. Малая величина магнитного поля при этом с лихвой компенсируется огромными размерами, так что критерий адиабатичности (2.21) оказывается выполненным.

2.7. Аналогия между движением заряженных частиц и распространением света

Полная энергия частицы, движущейся в стационарном поле, остается постоянной, и потому можно использовать вариационный принцип Мопертюи (2.5) для консервативных систем с лагранжианом вида (2.6). В векторной форме имеем

$$\delta \int_{\mathbf{x}^{(1)}}^{\mathbf{x}^{(2)}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m_0 \mathbf{v} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор частицы; $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ – начальная и конечная точки траектории.

Продвижение частицы по траектории удобно измерять длиной s , отсчитываемой вдоль этой траектории (естественная параметризация), при этом значениям $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ отвечают величины s_1 и s_2 соответственно. Пусть \mathbf{s}_0 – орт скорости частицы, тогда изменение положения частицы на величину ds изменяет радиус-вектор частицы на $d\mathbf{r} = \mathbf{s}_0 ds$, и мы получаем

$$\delta \int_{s_2}^{s_1} [(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_0] ds = \delta \int_{s_2}^{s_1} [\gamma m_0 v + q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_0)] ds = 0.$$

По своей форме этот принцип, выполняющийся на истинной траектории частицы, аналогичен принципу Ферма геометрической оптики: луч света в среде с переменным показателем преломления $n(s)$ проходит между точками s_1 и s_2 по траектории, обеспечивающей минимальное время:

$$\delta \int_{s_2}^{s_1} \frac{n(s)}{c} ds = 0.$$

Заметим, что из принципа Ферма могут быть получены все соотношения геометрической оптики, в том числе законы отражения и преломления света.

Электронно-оптический показатель преломления, записанный в виде

$$n_e = \gamma m_0 v + q(\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_0),$$

состоит из двух слагаемых, обусловленных наличием электрического и магнитного полей. Магнитное поле делает среду анизотропной: скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{s}_0$ зависит от направления скорости частицы. Если магнитного поля нет, то среда оказывается изотропной с показателем преломления

$$n_e = m_0 c \gamma \beta = m_0 c \sqrt{\frac{W}{E_0} \left(2 + \frac{W}{E_0} \right)}.$$

В нерелятивистском случае этот показатель пропорционален корню из потенциала $n_e \approx m_0 c \sqrt{2W/E_0} \sim \sqrt{U}$.

Рассмотрим расположенные близко друг к другу металлические сетки, которые разделяют две области с постоянными, но разными потенциалами U_1 и U_2 (рис. 2.9). Выше и ниже сеток напряженность электрического поля $\mathbf{E} = 0$ и траектории частиц прямолинейны, но в пространстве между сетками $\mathbf{E} \neq 0$ и траектории испытывают излом вследствие изменения вертикальной составляющей импульса. Условие сохранения горизонтальной составляющей импульса дает

$$\frac{\beta_1 \sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = \frac{\beta_2 \sin(\alpha_2)}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\sqrt{W_2 (2 + W_2/E_0)}}{\sqrt{W_1 (2 + W_1/E_0)}} = \frac{n_{e2}}{n_{e1}} \approx \frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1}},$$

последнее равенство относится к нерелятивистскому случаю. В этом выражении мы узнаем закон Снеллиуса – закон преломления светового луча на границе двух сред с разными показателями преломления n_1 и n_2 .

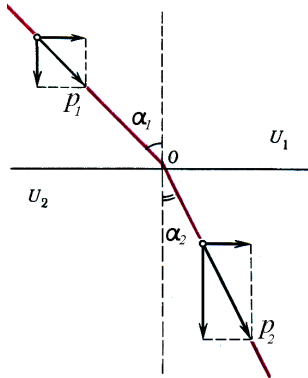


Рис. 2.9. Преломление релятивистского электронного пучка при прохождении через потенциальный барьер

Оптико-механическая аналогия открывает возможность решения различных задач движения заряженных частиц средствами геометрической оптики. Не случайно в электронной оптике существуют линзы, призмы, зеркала, микроскопы, спектрометры и пр. Накопленный веками опыт световой оптики существенно здесь помог.

Первое время электронная оптика пыталась буквально копировать световую: чтобы иметь скачкообразные изменения показателя преломления, потенциалы подавали на сеточки, выдавленные в форме чечевицы. Но редкие сеточки формировали плохое поле, а густые – перехватывали заметную долю тока, горели, газили и от этой практики пришлось полностью отказаться. В настоящее время в электронной оптике используются поля, созданные источниками, расположенными вне пучка частиц. Эти поля всегда плавные и непрерывные, поскольку квадрат показателя преломления должен удовлетворять уравнению Лапласа. В световой оптике показатели преломления для различных прозрачных сред отличаются всего в несколько раз, в то время как величина электронно-оптического показателя может изменяться в очень широких пределах. Взаимодействие частиц друг с другом в потоках высокой интенсивности также нарушает аналогию.

В заключение этого раздела заметим, что в световой оптике мощным средством создания качественных объективов является комбинация собирающих и рассеивающих линз, у которых коэффициенты

абберации имеют разные знаки. Но в электронной оптике с симметрией вращения все линзы только собирающие, рассеивающих нет и этот путь ослабления аббераций закрыт.

Задания

2.1. Найти кинетическую энергию электрона, начиная с которой скорости, вычисляемые по формулам (2.11) и (2.12), отличаются более чем на 10%.

2.2. Определить, сколько процентов от скорости света на выходе из электронной пушки составляет скорость электронов, если потенциал анода равен 100 кВ.

2.3. Найти координаты точки, в которой сфокусируется слаборасходящийся пучок заряженных частиц с удельным зарядом η , вылетающий из точки начала координат со скоростью v_0 под углом α к однородному электрическому полю величиной E .

2.4. В кольцевом ускорителе LEP с периметром 27 км электроны и позитроны ускорялись до энергии 100 ГэВ. Определить величину магнитного поля (в гауссах), которое было необходимо для удержания частиц. Сравнить его с магнитным полем ускорителя LHC, построенного в том же туннеле, который ускоряет протоны до энергии 7 ТэВ.

2.5. Доказать формулу (2.20).

2.6. К зазору размером $d = 10$ см между параллельными проводящими пластинами приложено напряжение $U = 100$ кВ. Параллельно плоскостям пластин направлено постоянное однородное магнитное поле. При какой величине поля B электроны, вылетающие из пластины с отрицательным потенциалом с нулевой начальной скоростью, не достигнут другой пластины (условие магнитной изоляции)?

2.7. Определить максимальное время жизни пучка электронов в тороидальном соленоиде радиусом $R = 1$ м, создающем поле на оси $B_0 = 10$ кГс. Радиус вакуумной трубы $r_0 = 1$ см. Энергия электронов $W = 100$ кэВ. Сколько оборотов успеют сделать частицы?

2.8. Магнитная ловушка образована двумя тонкими витками с током (их радиус $r = 10$ см), которые расположены на расстоянии $L = 40$ см друг от друга. В центре ловушки расположен источник, выпускающий заряженные частицы равномерно во все стороны. Найти, какая часть частиц будет покидать ловушку.

3. ПОЛЯ С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

3.1. Аксиально-симметричное электростатическое поле

В электродинамике заряженных частиц поля с симметрией вращения играют почти ту же роль, какая в световой оптике принадлежит преломляющим средам, образованным поверхностями вращения с общей осью. Ниже будет показано, что в таких полях параксиальный (близкий к оси) пучок электронов дает правильное электронно-оптическое изображение, т.е. такое устройство представляет собой линзу. При описании этих полей более других подходит цилиндрическая система координат (r, α, z) с осью z , направленной вдоль оси симметрии.

Электростатическое аксиально-симметричное поле создается электродами, являющимися поверхностями вращения, на которые подаются определенные потенциалы (потенциал катода принимается равным нулю, при этом выполняется закон (2.10)). В силу указанной симметрии потенциал не зависит от угловой координаты α и может быть найден из уравнения Лапласа. Согласно (1.9), учитывая, что $\partial/\partial\alpha \equiv 0$, получаем

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (3.1)$$

Решение будем искать в виде ряда

$$U(r, z) = U_0(z) + U_2(z)r^2 + U_4(z)r^4 + \dots,$$

в котором все нечетные степени r отсутствуют, поскольку все нечетные производные потенциала $\partial^{2k+1}U/\partial r^{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, на оси симмет-

рии должны обращаться в нуль. Далее предполагаем, что известно $U_0(z)$ – распределение потенциала на оси системы.

Подставляя этот ряд в (3.1), получаем

$$U_0''(z) + U_2''(z)r^2 + U_4''(z)r^4 + \dots + 2U_2(z) + 12U_4(z)r^2 + \dots + 2U_2(z) + 4U_4(z)r^2 + \dots = 0.$$

Группируя коэффициенты при одинаковых степенях r и приравнивая их нулю, находим

$$U_2 = -\frac{U_0''}{4}, \quad U_4 = -\frac{U_2''}{16}, \quad U_6 = -\frac{U_4''}{36}.$$

Подставляя эти выражения в (3.1), получим

$$\begin{aligned} U(r, z) &= U_0(z) - \frac{U_0^{(2)}(z)}{2^2}r^2 + \frac{U_0^{(4)}(z)}{2^2 \cdot 4^2}r^4 - \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} U_0^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где верхний индекс в скобках означает номер производной по z . Для компонент вектора напряженности электрического поля имеем

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{U_0^{(2)}(z)}{2}r - \frac{U_0^{(4)}(z)}{2^2 \cdot 4}r^3 + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n-1)!} U_0^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -U_0'(z) + \frac{U_0^{(3)}(z)}{2^2}r^2 - \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} U_0^{(2n+1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ряды (3.2)–(3.4) порождают иллюзию, что с их помощью можно надежно вычислять потенциал в любой точке вне оси. Однако более подробный анализ показывает, что это не так – решение уравнения Лапласа при задании граничных значений потенциала и нормальной производной на открытой поверхности (граничные условия Коши) оказывается неустойчивым. Означает это следующее: если потенциал на оси и все его ненулевые производные известны точно, то ряды (3.2)–(3.4) дают точное решение. Но если, как это обычно бывает, эти данные известны приближенно, то ошибка максимально быстро (экспоненциально) нарастает по мере удаления от оси. На практике эти ряды дают приемлемые результаты лишь недалеко от оси. К счастью, этого оказывается достаточно, так как по другим соображениям далеко от оси отходить не требуется.

3.2. Аксиально-симметричное магнитное поле

Магнитные поля с симметрией вращения создаются совокупностями круговых витков (катушками), плоскости которых перпендикулярны к оси z . Плотность тока в этом случае имеет единственную отличную от нуля азимутальную составляющую $j_\alpha = j$ ($j_r = j_z = 0$). Поскольку согласно уравнению (1.20) векторный магнитный потенциал свои векторные качества получает от тока, у него также отлична от нуля только азимутальная составляющая $A_\alpha = A$ ($A_r = A_z = 0$). Поскольку $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то для компонент индукции имеем (в соответствии с (1.8))

$$B_r = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA), \quad B_\alpha \equiv 0. \quad (3.5)$$

Найдем уравнение, которому удовлетворяет магнитный потенциал A . С этой целью воспользуемся равенством $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ и применим его к области поля, где токов нет. С учетом (1.8) и условия $\partial/\partial\alpha \equiv 0$ получаем

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\alpha & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial r & 0 & \partial/\partial z \\ B_r & 0 & B_z \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель, находим, что для обращения его в нуль необходимо обеспечить равенство

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0.$$

Подставляя в него зависимости компонент индукции от магнитного потенциала (3.5), получаем искомое уравнение:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \quad (3.6)$$

Далее будем действовать по аналогии со случаем электростатического потенциала, т.е. искать решение в виде ряда

$$\begin{aligned} A(r, z) = & f_0(z) + f_1(z)r + f_2(z)r^2 + \\ & + f_3(z)r^3 + f_4(z)r^4 + f_5(z)r^5 + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

В этой записи содержатся лишние члены, которые не удовлетворяют условию симметрии. Чтобы их выявить, запишем с помощью этого ряда выражение для B_z из (3.5):

$$B_z(r, z) = f_0(z)/r + 2f_1(z) + 3rf_2(z) + 4r^2f_3(z) + \dots$$

Условие симметрии требует, чтобы все нечетные производные $B_z(r, z)$ на оси z (т.е. при $r = 0$) обращались в нуль. Это заставляет нас выкинуть из (3.7) все четные члены и принять $f_1(z) = B_0(z)/2$, где $B_0(z) = B_z(r = 0, z)$ – индукция на оси z . Окончательно имеем

$$A(r, z) = B_0(z)r/2 + f_3(z)r^3 + f_5(z)r^5 + \dots$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.6), собирая и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях r , находим рекуррентные соотношения, позволяющие выразить все члены ряда через индукцию на оси и ее производные:

$$f_3(z) = -\frac{f_1''(z)}{8}, \quad f_5(z) = -\frac{f_3''(z)}{24}, \quad \dots$$

Окончательно для магнитного потенциала и компонент индукции получаем

$$\begin{aligned}
 A(r, z) &= \frac{B_0(z)}{2} r - \frac{B_0^{(2)}(z)}{2^2 \cdot 4} r^3 + \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} B_0^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 B_r(r, z) &= -\frac{B_0'(z)}{2} r + \frac{B_0^{(3)}(z)}{2^2 \cdot 4} r^3 - \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!} B_0^{(2n+1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1},
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 B_z(r, z) &= B_0(z) - \frac{B_0^{(2)}(z)}{2^2} r^2 + \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} B_0^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Все сказанное относительно неустойчивости рядов (3.2)–(3.4) предыдущего параграфа относится также к рядам (3.8)–(3.10).

3.3. Теорема Буша

Зная компоненты всех векторов поля с аксиальной симметрией, можем написать для этого случая полную систему уравнений. Для нерелятивистского электрона ($q = -e$, $\gamma = 1$, $\eta = e/m_0$) после вынесения за знак дифференциала массы покоя система (2.15) принимает вид

$$\ddot{r} = r\dot{\alpha}^2 - \eta E_r - \eta r \dot{\alpha} B_z, \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\alpha}) = -\eta r (\dot{z} B_r - \dot{r} B_z), \tag{3.12}$$

$$\ddot{z} = -\eta E_z + \eta r \dot{\alpha} B_r. \tag{3.13}$$

Видно, что уравнение (3.12) связано только с магнитным полем, и мы начнем с его анализа.

Пусть имеется некоторая электронная траектория. Вращая ее вокруг оси z , получим некоторую поверхность вращения (рис. 3.1). Магнитный поток, пронизывающий проходящее через точку (r, z) траектории поперечное сечение этой поверхности, выражается следующим образом:

$$\Psi(r, z) = 2\pi \int_0^r r B_z(r, z) dr = 2\pi \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} (rA) dr = 2\pi rA(r, z).$$

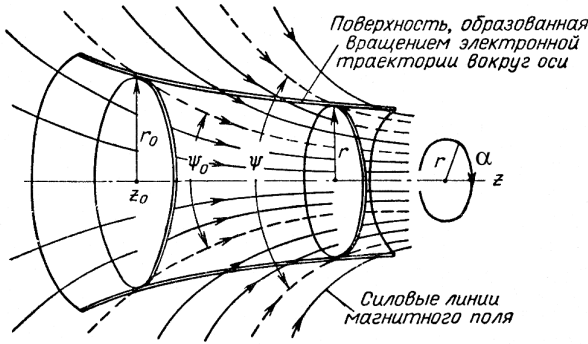


Рис. 3.1. К выводу теоремы Буша

Полученное равенство проясняет физический смысл магнитного потенциала в аксиально-симметричном поле. По мере продвижения электрона вдоль своей траектории $r(z)$ этот поток изменяется со скоростью, описываемой уравнением

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial\Psi}{\partial z} \dot{z} = 2\pi r \left(\dot{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} + \dot{z} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = 2\pi r (\dot{r} B_z - \dot{z} B_r),$$

где мы использовали соотношения (3.5). С учетом последнего равенства из уравнения (3.12) найдем

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\alpha}) = \frac{\eta}{2\pi} \frac{d}{dt} \Psi(r, z),$$

откуда немедленно следует интеграл движения

$$r^2 \dot{\alpha} - \frac{\eta}{2\pi} \Psi(r, z) = r^2 \dot{\alpha} - \eta r A(r, z) = C_\alpha = \text{const}. \quad (3.14)$$

Это соотношение составляет сущность *теоремы Буша*. Она утверждает, что при движении заряженной частицы в аксиально-симметричных полях существует интеграл движения (3.14), связывающий ее угловой момент с потоком магнитного поля через поперечное сечение поверхности, которая образована вращением траектории частицы вокруг оси.

Из (3.14) можно найти угловую скорость электрона

$$\dot{\alpha} = \frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta}{2\pi r^2} \Psi(r, z) = \frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta}{r} A(r, z). \quad (3.15)$$

Соотношение (3.14) можно получить прямо из лагранжиана системы, который для аксиально-симметричного случая имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + qA(r, z)r\dot{\alpha} - qU(r, z).$$

В явном виде в это выражение не входит α , т. е. α – циклическая координата. Соответственно отвечающий ей обобщенный импульс есть величина постоянная:

$$P_\alpha = \gamma m_0 r^2 \dot{\alpha} + q r A(r, z) = r(p_\alpha + qA) = C_\alpha^* = \text{const}. \quad (3.16)$$

Это выражение представляет собой (3.14) с учетом релятивизма. Хотя результат (3.16) получен намного быстрее и проще, анализ уравнений движения помогает лучше разобраться с механизмом возникновения этого важного интеграла движения.

В некоторых случаях знание постоянной Буша помогает получить дополнительную информацию о динамике частицы. Рассмотрим пример такого рода. Пусть частица стартует в точке вне магнитного поля со скоростью, параллельной оси z , а затем входит в однородное аксиально-симметричное поле (рис. 3.2, *a*). Поскольку до влета в поле частица не имеет закрутки, согласно (3.14) постоянная Буша равна

нулю: $C_\alpha = 0$. В однородном поле появляется $\dot{\alpha}$, которую можно найти из (3.15):

$$\dot{\alpha} = \frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta}{2\pi r^2} \Psi(r, z) = \frac{\eta B}{2} = \omega_L = \text{const}.$$

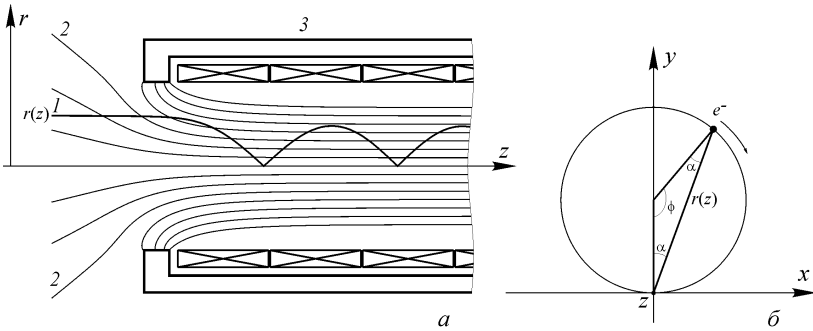


Рис. 3.2. Динамика электрона в аксиально-симметричном магнитном поле: *a* – влет в однородное поле; *б* – поперечное движение в однородном поле; 1 – траектория в плоскости rz ; 2 – силовые линии поля; 3 – магнитные катушки и экран

Частота $\omega_L = \eta B/2$ называется *ларморовой*. В то же время мы знаем, что в однородном магнитном поле вокруг силовой линии частица движется по ларморовской окружности с постоянной угловой скоростью $\omega_c = \eta B = 2\omega_L$ (циклотронная частота). Это кажущееся противоречие и поможет определить нам характер движения. Дело в том, что ω_L есть скорость изменения угловой координаты α в системе отсчета с центром на оси z , а ω_c – в системе отсчета с центром, совпадающим с центром ларморовской окружности. Можно показать, что частота ω_L будет постоянной в двух случаях: если центры систем отсчета совпадают (и тогда $\omega_L = \omega_c$) или если ларморовская окружность касается оси z . В последнем случае можно заметить, что $2\alpha + \phi = \pi$ (рис. 3.2, б). Дифференцируя это равенство, находим, что $\dot{\alpha} = \omega_L = -\dot{\phi}/2 = \omega_c/2$, как мы и получали выше. Таким образом, при движении в однородном поле частица, не имеющая начальной закрутки ($C_\alpha = 0$), раз в период будет касаться оси z (рис. 3.2, а).

3.4. Параксиальные уравнения движения

Чтобы продвинуться дальше в анализе системы уравнений (3.11)–(3.13), мы вынуждены ограничить себя так называемыми *условиями параксиальности* и считать справедливыми следующие два утверждения:

1) частица движется настолько близко к оси z , что главными в уравнениях движения оказываются линейные по r и \dot{r} члены;

2) наклон траектории к оси z настолько мал, что в выражении $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2$ первые два слагаемые малы по сравнению с третьим, т.е. $v^2 \approx \dot{z}^2$.

Рассматривая с этой точки зрения разложения (3.3)–(3.4), (3.9)–(3.10), находим, что для обеспечения параксиального приближения достаточно принять

$$E_r(r, z) \approx \frac{U_0''(z)}{2}r, \quad E_z(r, z) \approx -U_0'(z), \quad (3.17)$$

$$B_r(r, z) \approx 0, \quad B_z(r, z) \approx B_0(z), \quad \dot{\alpha} \approx \frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta B_0(z)}{2}.$$

Удобно также использовать координату z в качестве независимой переменной. Поскольку в рассматриваемом приближении $v \approx \dot{z}$, для перехода от производной по времени к производной по z надо использовать равенство

$$\frac{d}{dt} = \dot{z} \frac{d}{dz} \approx v \frac{d}{dz}.$$

Напоминаем, что точка означает дифференцирование по времени, а штрих – по координате.

Начнем с третьего уравнения системы (см. формулу (3.11)), которое в параксиальном приближении становится независимым от других:

$$\ddot{z} = v \frac{dv}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \eta \frac{dU_0(z)}{dz}, \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{v^2}{2} - \eta U_0(z) \right) = 0,$$

$$v(z) = \sqrt{2\eta U_0(z)}.$$

В последнем выражении учтено, что $v = 0$ при $U_0(z) = 0$.

Вместо второго уравнения системы (см. формулу (3.12)) будем рассматривать следствие из него – уравнение (3.15):

$$\dot{\alpha} = v\alpha' = \frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta B_0(z)}{2},$$

интегрирование которого дает

$$\alpha(r, z) = \int_{z_0}^z \frac{1}{\sqrt{2\eta U_0(z)}} \left[\frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta}{2} B_0(z) \right] dz + \alpha(z_0). \quad (3.18)$$

В общем случае ($C_\alpha \neq 0$) этот интеграл зависит от радиальной координаты, которая заранее неизвестна. Но если $C_\alpha = 0$, то угловое движение вычисляется до конца:

$$\alpha(r, z) = \int_{z_0}^z \frac{\eta}{\sqrt{8U_0(z)}} B_0(z) dz + \alpha(z_0). \quad (3.19)$$

Первое уравнение системы (см. формулу (3.11)) оказывается в параксиальном приближении основным:

$$\begin{aligned} \ddot{r} = v \frac{d}{dz} \left(v \frac{dr}{dz} \right) &= v^2 r'' + vv'r' = r \left[\frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta B_0(z)}{2} \right]^2 - \\ &- \eta U_0''(z) \frac{r}{2} - \eta r B_0(z) \left[\frac{C_\alpha}{r^2} + \frac{\eta B_0(z)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Поделив обе части на $v^2 = 2\eta U_0(z)$ и учитывая равенство $v'/v = U_0'(z)/2U_0(z)$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} r'' + r' \frac{U_0'(z)}{2U_0(z)} + \frac{r}{4U_0(z)} \times \\ \times \left\{ U_0''(z) + \frac{\eta B_0^2(z)}{2} \left[1 - \left(\frac{2C_\alpha}{\eta B_0(z) r^2} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Уравнение (3.20) в общем случае является нелинейным, что сильно затрудняет его анализ. Но $C_\alpha \neq 0$ только тогда, когда электронная пушка находится в магнитном поле. Рассмотрим этот случай позднее, а пока примем $C_\alpha = 0$:

$$r'' + r' \frac{U_0'(z)}{2U_0(z)} + \frac{r}{4U_0(z)} \left[U_0''(z) + \frac{\eta B_0^2(z)}{2} \right] = 0. \quad (3.21)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Оно сходно с известным уравнением осциллятора в среде с трением:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Это дает основание предположить (позже мы это подтвердим), что в (3.21) коэффициент при r' отвечает за ускорение или замедление, а при r – за фокусировку.

Нетрудно проверить, что (3.21) можно переписать в форме, которой мы будем неоднократно пользоваться:

$$\sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{dr}{dz} \right) + \frac{r}{4} \left[U_0''(z) + \frac{\eta B_0^2(z)}{2} \right] = 0.$$

Если сделать замену зависимой переменной $r(z) = \rho(z) U_0^{1/4}(z)$, то уравнение (3.21) примет вид

$$\rho'' + \rho \left[\frac{3}{16} \left(\frac{U_0'(z)}{U_0(z)} \right)^2 + \frac{\eta B_0^2(z)}{2} \right] = 0. \quad (3.22)$$

Это представление удобно тем, что не содержит второй производной распределения потенциала на оси, обычно определяемой экспериментально.

Заметим, что координата r цилиндрической системы координат не может быть отрицательной. Решение уравнения (3.20) (при $C_\alpha \neq 0$) всегда положительно – при подходе к оси «сила» инерции, пропорциональная C_α^2/r^3 , отталкивает частицу от нее. Отсутствие такого члена в уравнении (3.21) (в случае $C_\alpha = 0$) приводит к тому, что его решения могут быть как положительными, так и отрицательными. Это показывает, что применение

цилиндрической системы координат является некорректным для описания движения частицы в случае, если ее траектория пересекает ось.

Еще одной системой координат, которую удобно использовать для описания движения частицы в аксиально-симметричном поле, является декартова система координат x_L, y_L, z_L , ось z_L которой совпадает с осью симметрии системы, а оси x_L и y_L вращаются вокруг z_L с ларморовой частотой. Направим ось x_L таким образом, чтобы в начальный момент времени частица лежала в плоскости $x_L z_L$. В случае $C_\alpha = 0$ частица будет оставаться в этой плоскости и во все последующие моменты времени, поскольку и эта плоскость, и частица будут поворачиваться на угол $\alpha(z)$, определяемый выражением (3.19). Можно показать, что координата x_L частицы будет определяться уравнением, полностью аналогичным уравнению (3.21). Такое описание движения полностью корректно, при пересечении частицей оси координата x_L будет изменять свой знак. Строго говоря, координате r частицы соответствует модуль x_L , однако в дальнейшем при рассмотрении радиального движения будем использовать уравнение (3.21), обращаясь при этом с r как с декартовой координатой.

Движение в магнитном поле

Рассмотрим параксиальное движение в магнитном поле частицы с $C_\alpha = 0$. Потенциал пространства постоянен и равен U_0 . Угловое движение находится сразу из (3.19):

$$\alpha(r, z) = \sqrt{\frac{\eta}{8U_0}} \int_{z_0}^z B_0(z) dz + \alpha(z_0),$$

а радиальное – определяется уравнением

$$r'' + \frac{\eta B_0^2(z)}{8U_0} r = 0. \quad (3.23)$$

Как видно, угол поворота зависит от индукции линейно, а фокусирующая сила – квадратично. Это позволяет за счет смены знака симметричного распределения $B_0(z)$ получить нулевой угол поворота изображения, что не отразится на фокусировке.

Электростатическое поле

При равном нулю магнитном поле углового движения не возникает, а радиальное определяется уравнением

$$r'' + r' \frac{U_0'(z)}{2U_0(z)} + r \frac{U_0''(z)}{4U_0(z)} = 0. \quad (3.24)$$

Более подробно это уравнение будет рассмотрено в разделе, посвященном электростатическим линзам, а пока отметим три закона подобия, которые хорошо видны из (3.24):

1) изменение всех потенциалов в k раз не изменяет траектории частиц, но изменяет их скорость в \sqrt{k} раз;

2) если изменить размеры системы в l раз, то траектории, сохраняя подобие, увеличатся в l раз. Скорость частиц изменится в \sqrt{l} ;

3) изменение отношения заряда к массе в n раз не изменяет траекторию. Скорость частиц изменится в \sqrt{n} .

Интересно отметить, что из этих трех законов подобия при учете релятивизма сохраняется только второй, касающийся изменения размеров системы. Два других сливаются в один: если в k раз увеличить потенциалы и в k раз уменьшить отношение заряда к массе, то траектории не изменятся.

Задания

3.1. Перепишите ряды (3.3) и (3.4) относительно $E_0(z)$ – электрического поля на оси системы. Сравните получившиеся выражения с (3.9) и (3.10).

3.2. Найдите эквипотенциальные линии для $U = 0$, если потенциал на оси аксиально-симметричной системы $U_0(z) = \alpha z^2$. Определите формулу линий для $U \neq 0$.

3.3. Вычислите поле на оси длинного тонкого соленоида (длина соленоида l , радиус a , число витков N , ток I). Рассчитайте $B_r(r, z)$ и $B_z(r, z)$ с точностью до третьего порядка по r .

3.4. Покажите, что решение уравнения (3.23) при $B_0(z) = B_0 = \text{const}$ совпадает с движением, изображенным на рис. 3.2, при условии $v_z \approx v$.

4. ЛИНЗЫ В ОПТИКЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

4.1. Некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение следующего вида:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', \dots, y^{(n)}$ вида

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots \\ + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Если $f(x) = 0$, то уравнение (4.1) называется *линейным однородным* уравнением. Далее предполагаем, что коэффициенты $p_1(x), \dots, p_n(x)$ непрерывны.

Совокупность n линейно независимых на каком-либо интервале решений линейного однородного дифференциального уравнения порядка n называется *фундаментальной системой* решений на этом интервале.

Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на некотором интервале, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ для каждого x из этого интервала. Если функции y_1, y_2, \dots, y_n имеют производные порядка $n-1$, то из них можно составить определитель n -го порядка:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

называемый *определителем Вронского*. Если эти функции линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского тождественно равен нулю.

Для того чтобы система n решений однородного уравнения (4.1) была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы составленный для них определитель Вронского был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала непрерывности коэффициентов $p_1(x), \dots, p_n(x)$. Определитель Вронского любой системы решений однородного уравнения (4.1) удовлетворяет уравнению

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0,$$

Отсюда следует *формула Остроградского–Лиувилля*:

$$W(x) = W_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x p_1(x) dx\right),$$

где $W_0 = W(x_0)$ – определитель Вронского в точке x_0 .

Зная фундаментальную систему решений, любое решение линейного однородного дифференциального уравнения можно представить в виде линейной комбинации этих решений:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

где C_1, \dots, C_n – постоянные коэффициенты.

4.2. Матричное описание динамики частиц

В предыдущем разделе было показано, что в аксиально-симметричных системах возможно разложение компонент электрического поля вблизи оси системы по степеням r (выражения (3.3) и (3.4)). Аналогично раскладывается и магнитное поле. Приближенные уравнения движения частицы вблизи оси (параксиальные уравнения) получаются при подстановке этих разложений в исходную систему уравнений и удержании только линейных по r членов, а также из условия $v^2 \approx v_z^2$. При этих условиях движение нерелятивистского электрона по r описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка (3.20). Если электронная пушка находится вне магнитного поля, то это уравнение переходит в линейное уравнение (3.21). Как было показано выше, зная два линейно независимых решения этого уравнения $r_1(z)$ и $r_2(z)$, любое другое решение можно выразить через их линейную комбинацию:

$$r(z) = C_1 r_1(z) + C_2 r_2(z).$$

Для дальнейшего анализа очень удобно в качестве фундаментальной системы использовать решения $C(z)$ и $S(z)$ с начальными условиями:

$$C(0) = 1, \quad C'(0) = 0, \quad S(0) = 0, \quad S'(0) = 1.$$

Эти решения зачастую называют косинусо- и синусообразными. То, что эти решения являются линейно независимыми, показывает составленный из них определитель Вронского, не равный нулю при $z = 0$ и, как следует из формулы Остроградского–Лиувилля, при всех других z . Произвольное решение (3.21), заданное начальными условиями $r(0) = r_0$, $r'(0) = r'_0$, может быть записано в виде

$$r(z) = r_0 C(z) + r'_0 S(z), \quad r'(z) = r_0 C'(z) + r'_0 S'(z). \quad (4.2)$$

Каждое из этих выражений есть *линейное* преобразование входных величин. Важно отметить, что линейное преобразование переводит линию в линию, эллипс – в эллипс.

Удобным инструментом для представления линейных преобразований является матричная алгебра. Решение (4.2) можно представить в виде матрицы перехода из точки 0 в точку z :

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = M(0|z) \cdot \begin{bmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{bmatrix}, \quad M(0|z) = \begin{bmatrix} C(z) & S(z) \\ C'(z) & S'(z) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Матрицы перехода – удобный инструмент для анализа динамики заряженных частиц. Рассмотрим случай, когда частица пролетает сквозь систему, составленную из нескольких элементов (линз, ускоряющих промежутков, пустых промежутков и т.п.). Предположим, что известны матрицы M_1, \dots, M_N перехода из начала в конец для каждого элемента. Матрица перехода из начала в конец всей системы будет равна произведению матриц элементов в обратном порядке:

$$M = M_N \cdot M_{N-1} \cdot \dots \cdot M_1. \quad (4.4)$$

Естественно, при помощи матриц можно описывать движение не только по r , но и по любой другой координате, если соответствующее уравнение движения – линейное. Например, в декартовой системе координат линеаризованные поперечные компоненты аксиально-симметричного поля можно записать как:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &\approx \frac{U_0''(z)}{2} x, & E_y(x, y, z) &\approx \frac{U_0''(z)}{2} y, \\ B_x(x, y, z) &\approx -\frac{B_0'(z)}{2} x, & B_y(x, y, z) &\approx -\frac{B_0'(z)}{2} y. \end{aligned}$$

Подстановка этих компонент в уравнения движения по x и по y системы (2.14) и учет условий парааксиальности дают систему из двух линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка. Фундаментальная система решений состоит в этом случае из четырех функций, и для описания динамики заряженной частицы необходимо использовать матрицу 4×4 . Связь движения по координатам x и y возникает из-за наличия магнитного поля.

Простейшей матрицей является матрица пустого (без полей) промежутка. Если длина промежутка равна d , то

$$M = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

4.3. Фокусирующие свойства линейных систем

Рассмотрим траекторию движения электрона, определяемую линейным уравнением (3.21). Представим решение этого уравнения, определяемое начальными условиями $r(0) = r_0$, $r'(0) = r'_0$, в виде

$$r(z) = r_0 C(z) + r'_0 S(z).$$

Пусть $z = b$ – первая отличная от $z = 0$ точка, где $S(b) = 0$. В этой точке имеем $r(b) = r_0 C(b)$ независимо от величины r'_0 . Это значит, что точка $r_b = r(b)$ оптически сопряжена точке r_0 – все лучи, выходящие из r_0 под различными углами r'_0 , вновь соберутся в точке r_b (рис. 4.1). Величина $C(b) = r_b/r_0$ есть линейное увеличение линзы, одинаковое для любых r_0 . В параксиальном приближении отношение углов растворов конусов лучей, выходящих из r_0 и сходящихся в r_b , равно $\gamma_b/\gamma_0 = S'(b)$. Таким образом, величина $S'(b)$ задает угловое увеличение линзы.

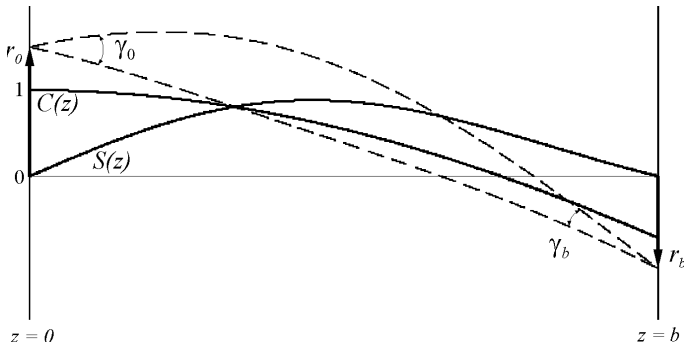


Рис. 4.1. Получение оптического изображения в параксиальных полях

Найдем связь между линейным и угловым увеличениями. Поскольку $S(b) = 0$, то определитель Вронского в точке $z = b$ равен

$$W(b) = C(b)S'(b).$$

С другой стороны, из уравнения движения (3.21) и формулы Остроградского–Лиувилля следует, что

$$W(b) = W(0) \exp\left(-\int_0^b \frac{U'_0(z)}{2U_0(z)} dz\right) = \exp\left(\int_0^b d(\ln U_0^{-1/2})\right) = \sqrt{\frac{U_0(0)}{U_0(b)}}.$$

Здесь учитывается, что $W(0) = 1$. Отсюда

$$C(b)S'(b) = \sqrt{\frac{U_0(0)}{U_0(b)}}. \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) аналогично известной из геометрической оптики теореме Лагранжа–Гельмгольца; при этом коэффициенту преломления среды, согласно электронно-оптической аналогии, соответствует $\sqrt{U_0(z)}$.

Таким образом, аксиально-симметричное электростатическое поле для парааксиальных электронных траекторий является неискажающей линзой. Этот факт – прямое следствие линейности уравнения движения. Можно добавить в систему магнитное поле, учесть релятивизм, но если движение описывается линейным дифференциальным уравнением, то мы имеем дело с неискажающей линзой. Необходимо, однако, помнить, что парааксиальные уравнения всегда приближенные и пользоваться ими можно, если траектория не отходит далеко от оси.

Несколько слов о терминах. Траектория частицы преломляется в тех местах, где есть поперечная компонента поля. Если этот участок занимает вдоль оси сравнительно мало места, то его называют линзой. Если же он достаточно протяженный или повторяющийся, то говорят о системе линз, фокусирующем канале и т.д.

4.4. Построение изображения в линзе

Рассмотрим построение изображения в линзе (рис. 4.2), входные и выходные параметры траектории в которой связаны линейной зависимостью:

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

где $r'_{1,2} = (dr/dz)_{1,2}$, M – матрица преобразования $1 \rightarrow 2$. Обозначим через P_1 и P_2 оптически сопряженные точки. Точка P_1 , лежащая на оси линзы, для которой точка P_2 находится на бесконечности, называется фокусом линзы. Таких точек у линзы две – входной и выходной фокусы. В фокусах пересекаются траектории частиц, движущихся на входе (выходе) линзы параллельно оси системы.

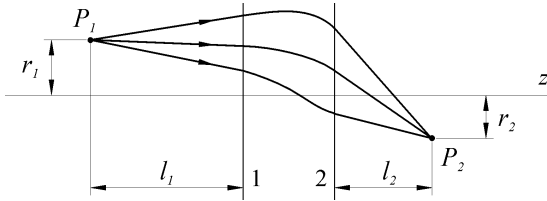


Рис. 4.2. Ход траекторий в линзе:

1 – входная плоскость, 2 – выходная плоскость

Прежде всего отметим, что траектории, входящие в линейную систему параллельно оси (т.е. $r'_1 = 0$), пересекаются с осью в точке, отстоящей от выходной плоскости на расстоянии

$$z_{F2} = \frac{r_2}{-r'_2} \Big|_{r'_1=0} = \frac{A}{-C}.$$

Положение этой точки не зависит от r_1 , значит, в ней пересекаются все траектории, параллельные оси – это задний фокус линзы. Аналогично точка

$$z_{F1} = \frac{r_1}{-r'_1} \Big|_{r'_2=0} = \frac{D}{-C}$$

является передним фокусом линзы.

Можно показать, что для произвольной точки P_1 , находящейся на расстоянии l_1 от входной плоскости линзы и r_1 – от оси системы, существует оптически сопряженная точка P_2 , находящаяся на расстоянии

$$l_2 = -\frac{Al_1 + B}{Cl_1 + D}$$

от выходной плоскости линзы и на расстоянии

$$r_2 = \frac{AD - BC}{Cl_1 + D} r_1 = \frac{r_1}{Cl_1 + D}$$

от оси. Здесь учтено, что

$$AD - BC = 1. \quad (4.7)$$

Справедливость этого утверждения будет рассмотрена ниже.

Для нахождения изображения в линзе при помощи простых геометрических построений вводят четыре кардинальных элемента – два главных фокуса F_1 и F_2 (рассмотрены выше) и две главные точки N_1 и N_2 . Проходящие через главные точки плоскости H_1 и H_2 , перпендикулярные оси системы, называют главными плоскостями. Эти плоскости выбираются таким образом, чтобы в них находились точки пересечения прямых, являющихся продолжением участков траекторий до и после линзы, если траектории проходят через один из фокусов (рис. 4.3).

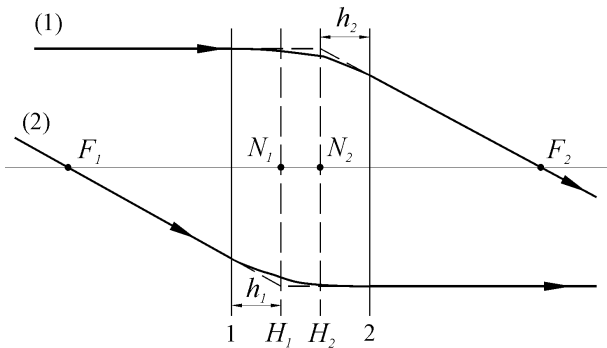


Рис. 4.3. Главные плоскости и точки

Если рассмотреть луч 1, то очевидно, что плоскость H_2 отстоит от выходной плоскости линзы на расстояние

$$h_2 = \frac{r_2 - r_1}{-r_2'} \Big|_{r_1'=0} = \frac{1 - A}{C}.$$

Здесь определение h дано со знаком: при $h_2 > 0$ плоскость H_2 расположена справа от выходной границы. Аналогично для луча 2:

$$h_1 = \frac{r_2 - r_1}{r_1'} \Big|_{r_2'=0} = \frac{AD - BC - D}{-C} = -\frac{1 - D}{C}.$$

Можно показать, что главные точки N_1 и N_2 лежат на пересечениях с осью продолжений участков траекторий, для которых $r_1' = r_2'$.

Расстояния от главных точек до соответствующих главных фокусов называют фокусными расстояниями линзы. Используя рис. 4.3, запишем:

$$f_1 = F_1 N_1 = \frac{-r_2}{-r_1'} \Big|_{r_2'=0} = -\frac{AD - BC}{C} = -\frac{1}{C},$$

$$f_2 = F_2 N_2 = \frac{r_1}{-r_2'} \Big|_{r_1'=0} = -\frac{1}{C}.$$

Фокусное расстояние также определено со знаком, его отрицательному значению соответствует случай рассеивающей линзы. Таким образом,

$$f_1 = f_2 \equiv f = -\frac{1}{C}. \quad (4.8)$$

Можно показать, что основное соотношение линзы имеет вид

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (4.9)$$

где p – расстояние от какой-либо точки P_1 , лежащей слева от линзы, до главной плоскости H_1 ; q – расстояние от главной плоскости H_2 до точки P_2 , которая оптически сопряжена точке P_1 .

Выражения (4.8) и (4.9) справедливы, если выполняется условие (4.7). Рассмотрим это условие более подробно. Из выражения (4.3) следует, что определитель матрицы перехода есть определитель Врон-

ского, составленный из косинусо- и синусообразных решений. Выше было найдено, что

$$W(z) = \det M(z) = \sqrt{\frac{U_0(0)}{U_0(z)}}.$$

Таким образом, условие (4.7) справедливо, если справа и слева от линзы находятся области с одинаковым потенциалом (или среда справа и слева от линзы имеет одинаковый коэффициент преломления). В случае различных потенциалов слева и справа от линзы (коэффициенты преломления разнятся, случай иммерсионной линзы) фокусные расстояния будут различны. Основное соотношение линзы в этом случае

$$\frac{f_1}{p} + \frac{f_2}{q} = 1. \quad (4.10)$$

Рассмотренный общий случай соответствует так называемой *толстой* линзе. Если же траектория на толщине линзы меняется пренебрежимо мало, такая линза называется *тонкой*. Для нее $r_1 \approx r_2$, т.е. $A = 1$, $B = 0$, а из условия (4.7) следует, что $D = 1$. Таким образом, матрица преобразования тонкой линзы, имеющая справа и слева одинаковые потенциалы, имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Главные плоскости совпадают с плоскостью линзы. Фокусное расстояние тонкой линзы является ее исчерпывающей характеристикой. Еще раз подчеркнем, что для собирающей линзы $f > 0$, для рассеивающей – $f < 0$.

В заключение укажем, что матрицу произвольной оптической системы можно представить как произведение матрицы тонкой линзы и матриц двух пустых промежутков:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & AD - BC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это выражение дополнительно поясняет смысл введения главных плоскостей.

4.5. Аксиально-симметричные электростатические линзы

Рассмотрим случай тонкой линзы. При этом область Δz , занятая полем, невелика, что соответствует условию $F_1, F_2 \gg \Delta z$. Радиальный размер траектории r_0 в пределах линзы не успеваеет заметно измениться и можно однократно проинтегрировать уравнение (3.21), записанное при $B_0(z) = 0$ и преобразованное к виду

$$\sqrt{U_0(z)} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{U_0(z)} \frac{dr}{dz} \right) + r \frac{U_0''(z)}{4} = 0.$$

Интегрирование дает (рис. 4.4)

$$\sqrt{U_0(z)} r' \Big|_{z_2} - \sqrt{U_0(z)} r' \Big|_{z_1} = -\frac{r_0}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z)}{\sqrt{U_0(z)}} dz,$$

где

$$r'(z_1) = \tan \alpha = r_0/p, \quad r'(z_2) = -\tan \beta = -r_0/q.$$

После сокращения на r_0 получаем

$$\frac{\sqrt{U_0(z_1)}}{p} + \frac{\sqrt{U_0(z_2)}}{q} = \frac{1}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z)}{\sqrt{U_0(z)}} dz = \frac{1}{4} \int_{z_1}^{z_2} \frac{d(U_0'(z))}{\sqrt{U_0(z)}}.$$

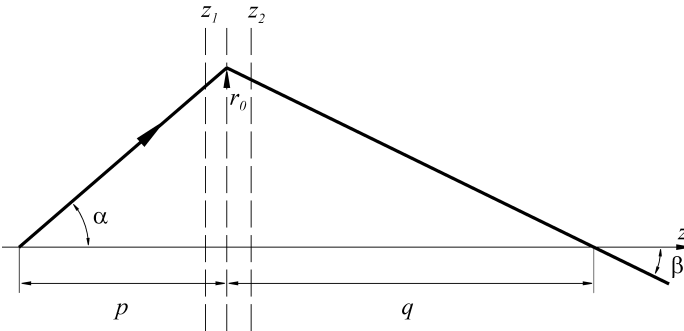


Рис. 4.4. Схема тонкой линзы

Интеграл можно взять по частям:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{d(U'_0(z))}{\sqrt{U_0(z)}} = \frac{U'_0(z)}{\sqrt{U_0(z)}} \Big|_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z)}{U_0^{3/2}(z)} dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0''(z)}{U_0^{3/2}(z)} dz.$$

В последнем выражении мы учли, что $U'_0(z) = 0$ не только на краях, но и вне линзы, и распространили интегрирование на всю вещественную ось.

Из основного соотношения линзы (4.10) следует, что $p = f_1$ при $q = \infty$ и $q = f_2$ при $p = \infty$. Отсюда находим выражения для обратных фокусных расстояний:

$$\frac{1}{f_{1,2}} = \frac{1}{4\sqrt{U_0(z_{1,2})}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0''(z)}{\sqrt{U_0(z)}} dz = \frac{1}{8\sqrt{U_0(z_{1,2})}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0''(z)}{U_0^{3/2}(z)} dz. \quad (4.11)$$

Поскольку $U_0(z) > 0$ и во второе выражение в (4.11) производная потенциала входит в четной степени, то оба фокуса могут быть только положительными, а электростатические линзы с симметрией вращения – только собирающими. Это исключает широко используемую в световой оптике возможность создания высококачественных объективов за счет комбинации собирающих и рассеивающих линз. Отношение двух фокусных расстояний

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\sqrt{U_0(z_1)}}{\sqrt{U_0(z_2)}} = \frac{n_1}{n_2}$$

есть отношение электронно-оптических показателей преломления сред слева и справа от линзы.

Рассмотрение различных типов электростатических линз удобно начать с анализа динамики частицы при изменении продольного электрического поля. Пусть в тонком металлическом экране, разделяющем две области с постоянными полями E_1 и E_2 , имеется небольшое круглое отверстие (рис. 4.5). Такая система, носящая название *линзы-диафрагмы*, строго говоря, линзой не является, поскольку

справа и слева от нее поля не равны нулю. Однако перпендикулярная компонента поля присутствует только в области отверстия, и эту область можно рассматривать как тонкую линзу, преломляющую траекторию частицы.

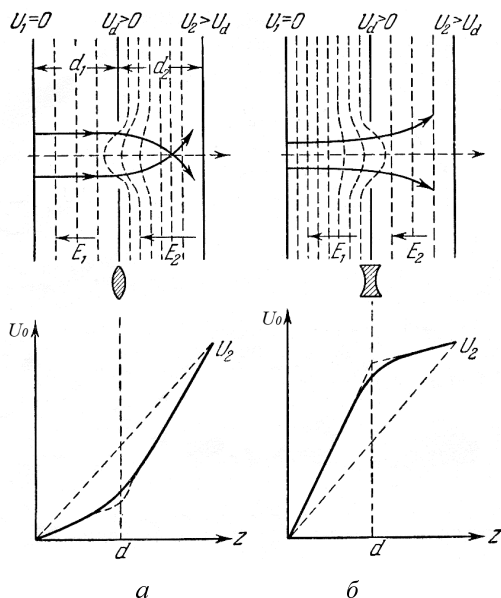


Рис. 4.5. Линза-диафрагма и различные режимы ее работы

В случае небольшого отверстия потенциал во всей области линзы будет только немного отличаться от потенциала диафрагмы U_d . Тогда фокусное расстояние линзы можно рассчитать при помощи первого выражения из (4.11):

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{4\sqrt{U_d}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{U_0''(z)}{\sqrt{U_0(z)}} dz \approx \frac{1}{4 U_d} \int_{z_1}^{z_2} U_0''(z) dz = \\ &= \frac{U_0'(z_2) - U_0'(z_1)}{4 U_d} = \frac{E_1 - E_2}{4 U_d}. \end{aligned}$$

Для случая, изображенного на рис. 4.5, а, $|E_2| > |E_1|$, но поскольку $E_1, E_2 < 0$, фокусное расстояние оказывается положительным, а линза – собирающей. Случай $|E_2| < |E_1|$ (рис. 4.5, б) соответствует рассеивающей линзе. Таким образом, можно сформулировать следующее правило: при увеличении ускоряющего поля заряженные частицы фокусируются, при его уменьшении – дефокусируются.

На практике линзами-диафрагмами являются анодное отверстие в электронных пушках, вход и выход длинных ускоряющих секций, ячейки сетки электронных ламп и т.п. Заметим, что если в диафрагме сделать не отверстие диаметром D , а щель той же ширины, то такая линза станет вдвое сильнее:

$$\frac{1}{f} = \frac{E_1 - E_2}{2 U_d},$$

что часто используется в линейных ускорителях.

Иммерсионная линза имеет постоянные, но разные потенциалы слева и справа. Следовательно, фокусные расстояния иммерсионной линзы также различаются. Иммерсионные линзы не только фокусируют частицы, но и изменяют их энергию.

Простейшие иммерсионные линзы состоят из двух коаксиальных цилиндров (рис. 4.6). Рассмотрим подробнее динамику частиц в этих линзах. На графиках показаны распределения потенциалов на оси (кривые 1), их первых и вторых производных (соответственно кривые 2 и 3). Мы уже знаем, что величина потенциала определяет скорость частицы. Первая производная потенциала отвечает за ускорение или замедление частицы, поскольку она определяет продольную компоненту поля (см. разложение (3.17)), а вторая – за фокусировку (определяет поперечную компоненту поля). Вторая производная меняет свой знак в пределах линзы. Как можно убедиться, площади положительной и отрицательной областей строго равны, и потому области фокусировки и дефокусировки также оказываются равны. Но, как видно из рис. 4.6, в области фокусировки скорость частиц меньше, чем в области дефокусировки. Частица (и это общее правило) находится в области фокусировки дольше, чем в области дефокусировки, что и обеспечивает общий результат в пользу фокусировки. Это же рассмотрение показывает, что результирующий фокусирующий эффект, являясь разностью двух близких величин, оказывается малым.

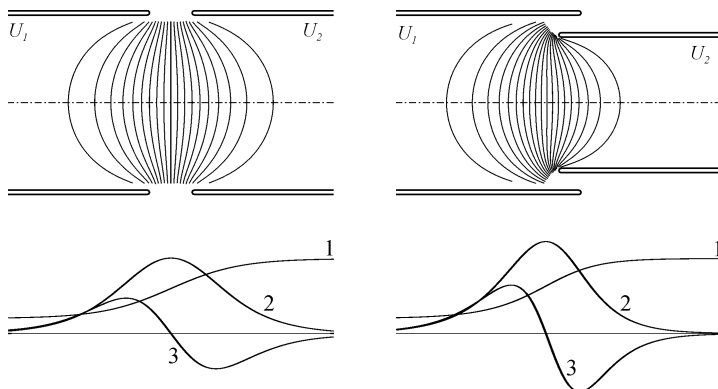


Рис. 4.6. Иммерсионные линзы, образованные двумя коаксиальными цилиндрами

Если в иммерсионной линзе поле достаточно однородно, а на краях быстро нарастает и спадает, то такую линзу можно рассматривать как комбинацию двух линз-диафрагм с ускоряющим зазором между ними.

У *одиночной линзы* потенциалы справа и слева постоянны и равны между собой. Соответственно, в отличие от иммерсионной линзы, фокусные расстояния одиночной линзы одинаковы. Также одиночная линза не изменяет энергию частиц. Сделанные выше рассуждения о преобладании фокусирующего эффекта применимы и к одиночной линзе.

Конструкция одиночной линзы включает как минимум три электрода, пример трехэлектродной линзы приведен на рис. 4.7.

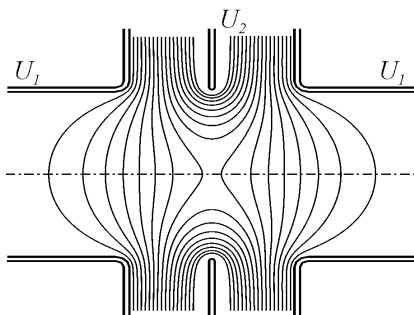


Рис. 4.7. Одиночная трехэлектродная линза

4.6. Аксиально-симметричные магнитные линзы

Простейшей аксиально-симметричной магнитной линзой является виток с током. Реальные конструкции состоят из многих витков, которые необходимо жестко закреплять, чтобы противостоять давлению магнитного поля. Магнитные линзы часто бывают заключены в железный экран (рис. 4.8). Экран предотвращает расплывание магнитного потока, концентрируя его в ограниченной области вдоль оси. Как будет показано ниже, это приводит к увеличению фокусирующей силы линзы.

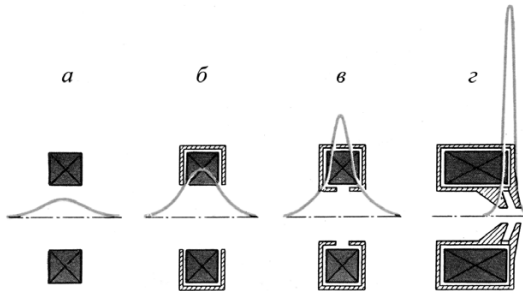


Рис. 4.8. Распределение магнитного поля на оси магнитных линз различных конструкций:

a – магнитная линза без железа; *б* и *в* – бронированные линзы; *г* – бронированная линза с полюсным наконечником

В аксиально-симметричных магнитных линзах магнитное поле имеет только две отличные от нуля компоненты:

$$B_r \neq 0, B_z \neq 0, B_\alpha = 0.$$

Пусть в линзу параллельно оси влетает заряженная частица: $v_{0z} \neq 0$, $v_{0r} = v_{0\alpha} = 0$. Поскольку $\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$, на частицу будет действовать только радиальная компонента магнитного поля, а сила будет направлена по азимуту. Откуда же берется необходимая для фокусировки радиальная компонента силы? Рассмотрим этот случай более подробно.

Поскольку вне линзы магнитное поле отсутствует, частица при влете в линзу неизбежно пересекает силовые линии магнитного поля

(рис. 4.9). Радиальная компонента магнитного поля порождает при этом действующую на частицу азимутальную силу, соответственно у нее появляется $v_\alpha \neq 0$. В свою очередь эта азимутальная скорость, взаимодействуя с аксиальной компонентой магнитного поля $B_z \neq 0$, и порождает радиальную силу. Как нетрудно убедиться, эта сила всегда будет направлена к оси, независимо от знака заряда частицы, направления ее движения и направления силовых линий поля. На протяжении всей первой половины линзы знак азимутальной компоненты силы одинаков, и вращательная скорость v_α будет непрерывно возрастать. Одновременно за счет увеличения v_α и B_z будет возрастать фокусирующая сила F_r . При переходе частицы во вторую половину линзы знак B_r изменится, и вращательная скорость будет постепенно уменьшаться. Знак фокусирующей силы останется, однако, неизменным, поскольку знаки v_α и B_z не изменились. В результате пролета частицы сквозь линзу ее траектория окажется повернутой на некоторый угол относительно исходной плоскости rz , а ее импульс приобретет дополнительную радиальную составляющую.

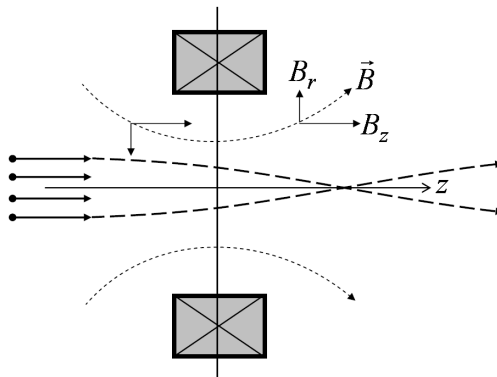


Рис. 4.9. Движение заряженных частиц в магнитной линзе

Вычислим фокусное расстояние линзы в предположении, что радиус частицы не успевает сильно измениться за время ее пролета сквозь линзу (тонкая линза). Пусть рассматриваемая частица – электрон – до

влета в линзу не имеет азимутальной скорости. Тогда в парааксиальном приближении теорема Буша имеет вид:

$$\gamma r^2 \dot{\alpha} - \frac{\eta}{2\pi} \pi r^2 B_0(z) = 0, \quad \dot{\alpha} = \eta B_0(z) / 2\gamma,$$

где $B_0(z)$ – поле на оси, $\eta = e/m_0$ – удельный заряд электрона. Уравнение движения по радиусу в этом приближении

$$\frac{dp_r}{dt} = \gamma m_0 r \dot{\alpha}^2 - e r \dot{\alpha} B_0(z) = -\frac{e^2 B_0^2(z)}{4\gamma m_0} r.$$

Перейдем от производной по времени к производной по координате и найдем полное приращение радиального импульса:

$$\Delta p_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_r}{dt} dt = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_r}{dt} dz = -\frac{e^2 r}{4\gamma m_0 v} \int_{-\infty}^{+\infty} B_0^2(z) dz.$$

Обратное фокусное расстояние линзы

$$f^{-1} = -\frac{1}{r} \frac{\Delta p_r}{p} = \frac{e^2 B_{\max}^2}{4p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{B_0(z)}{B_{\max}} \right)^2 dz = \frac{L_{\text{eff}}}{4R_{L,\max}^2}.$$

Здесь через $R_{L,\max}$ обозначен ларморовский радиус частицы, соответствующий максимальному магнитному полю в линзе. *Эффективная длина линзы*

$$L_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{B_0(z)}{B_{\max}} \right)^2 dz$$

зависит только от конструкции самой линзы. Так, для тонкого витка с радиусом r_0 эффективная длина $L_{\text{eff}} = 3\pi r_0 / 8$. Поле на оси бронированной катушки с радиусом r_0 приближенно описывается формулой

$$B_0(z) \approx \frac{B_{0,\max}}{\text{ch}(z/a_{\text{eff}})},$$

где $a_{\text{eff}} = 0,55r_0$. Отсюда эффективная длина бронированной катушки $L_{\text{eff}} \approx 2a_{\text{eff}}$.

Как и в случае электростатической линзы, сила аксиально-симметричной магнитной линзы быстро ослабевает с ростом энергии частицы:

$$f^{-1} \sim 1/\gamma^2$$

при большой энергии частицы ($\beta \approx 1$).

Осталось ответить на вопрос: выгодно ли делать бронированную линзу? При бронировании уменьшается область, занятая на оси магнитным полем, следовательно, уменьшается L_{eff} . С другой стороны, при неизменном количестве ампер-витков в катушке магнитное поле на оси приблизительно обратно пропорционально эффективной длине: $B_{\text{max}} \sim 1/L_{\text{eff}}$. Находим, что сила линзы

$$f^{-1} \sim B_{\text{max}}^2 \cdot L_{\text{eff}} \sim 1/L_{\text{eff}}.$$

Отсюда следует, что при бронировании сила магнитной линзы возрастает.

4.7. Магнитные линзы с азимутальным полем

В рассмотренных выше аксиально-симметричных электростатических и магнитных линзах поле в основном направлено вдоль оси, параллельно движению частиц, поэтому их иногда называют линзами с продольным полем. Ясно, что их фокусирующее действие невелико, поскольку перпендикулярная оси компонента силы мала. Чтобы проиллюстрировать это, вернемся к уравнению радиального движения системы (2.15) в цилиндрических координатах:

$$\frac{dp_r}{dt} - \gamma m_0 r \dot{\alpha}^2 = qE_r + qr\dot{\alpha}B_z - qz\dot{B}_\alpha.$$

В случае классических аксиально-симметричных линз $B_\alpha = 0$, и на фокусировку работают первые два члена в правой части. Оба они весьма слабые: электрическая сила E_r обращается в нуль на оси z ,

индукция магнитного поля B_z , хотя и может быть значительной, но работает в паре с очень слабой азимутальной компонентой скорости $r\dot{\alpha}$. Возникает вопрос: нельзя ли придумать устройство, в котором на фокусировку работало бы последнее в приведенном выше уравнении слагаемое $q\dot{z}B_\alpha$? Поскольку в него уже входит самая сильная компонента скорости частицы \dot{z} , необходимо как-то создать сильное азимутальное магнитное поле. Однако создать такое поле в пространстве, свободном от тока, невозможно, поскольку это противоречит закону полного тока. Для фокусировки ультррелятивистских частиц, способных проходить значительные толщины вещества без существенных потерь энергии, Г.И. Будкером было предложено использовать параболические и литиевые линзы (рис. 4.10).

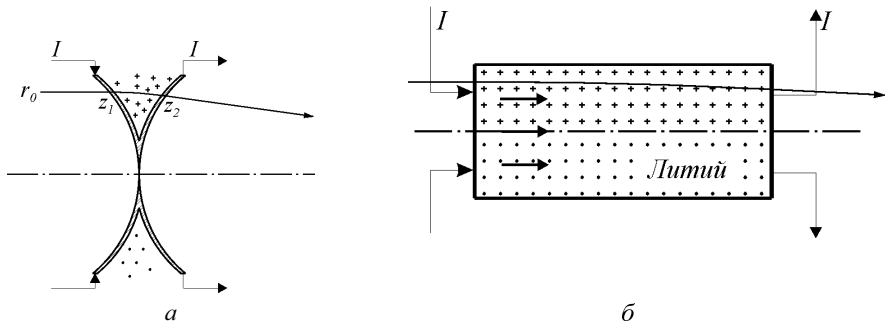


Рис. 4.10. Схемы параболической (а) и литиевой (б) линз, траектории частиц в них

Параболическая линза включает два параболоида вращения $z = ar^2$, выточенные из единого куска металла и имеющие общую шейку, к которым по периметру кольца подводится ток (рис. 4.10, а). Единственная компонента магнитного поля – азимутальная – зажата в кольцевое пространство между наружными поверхностями параболоидов и токоподводящей шиной (на рисунке показана крестиками и точками). Рассмотрим динамику частиц в такой линзе.

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \dot{r}) = -q\dot{z}B_\alpha, \quad B_\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Переходя к r как к независимой переменной и учитывая $\dot{z} \approx c$, $q = -e$, получаем

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \frac{c \mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} = \frac{K}{r}.$$

В приближении тонкой линзы имеем

$$\left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_2} - \left. \frac{dr}{dz} \right|_{z_1} = \frac{r_0}{p} + \frac{r_0}{q} = \frac{K}{r_0} \int_{z_1}^{z_2} dz.$$

Поскольку профиль линзы параболический, то

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = 2ar_0^2 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{e}{\gamma m_0 c^2} \frac{c \mu_0 I a}{\pi}.$$

Так, одна из первых линз для частиц с энергией $W = 130$ МэВ имела параметр параболы $a = 1 \text{ см}^{-1}$ и фокусное расстояние $f = 9$ см при токе $I = 120$ кА. Параболическая оптическая часть линзы была размером с грецкий орех.

При создании такой линзы необходимо было преодолеть ряд технических и инженерных трудностей, одна из которых – проблема прочности. Как известно, зажатое в ограниченной части пространства магнитное поле давит на стенки. Если давление измерять в атмосферах, а индукцию – в гауссах, то имеет место приближенная формула $p = (B/5000)^2$, согласно которой давление внутри линзы при $B = 100$ кГс, например, имеет величину 400 атм (!). Поскольку электронам приходится проходить через стенки параболоидов, то толщина этих стенок не должна превышать 0,2 мм. Совместить эти числа казалось невозможным, но удалось разработать специальное импульсное питание линзы с длительностью импульса порядка десятых долей микросекунды, после чего линзы, изготовленные из бериллия или алюминия, стали выдерживать сотни тысяч импульсов при давлении около 500 атм.

Параболические линзы нашли применение в источниках позитронов. Основной метод получения позитронов в физике высоких энергий – конверсия электронного пучка на вольфрамовой или танталовой мишени. Оказывается, что для оптимальной генерации пучка позитронов

необходимы короткофокусные линзы, которые фокусируют электронный пучок на мишень и собирают рожденные позитроны. То небольшое рассеяние, которое испытывают частицы при прохождении через стенки параболической линзы, в данном случае не играет значительной роли. Создание эффективной системы конверсии на основе параболических линз в большой степени предопределило успех первого в мире электрон-позитронного коллайдера ВЭПП-2.

Литиевые линзы, разработанные позднее, являются еще более эффективными фокусирующими системами. Такая линза представляет собой литиевый цилиндр, заключенный в тонкую металлическую оболочку (рис. 4.10, б). Литий – легкий металл, он слабо рассеивает и поглощает ультрарелятивистские частицы. Пропускаемый через этот цилиндр ток с однородной плотностью создает линейно растущее азимутальное поле, которое и осуществляет фокусировку проходящих вдоль оси цилиндра частиц. Литиевые линзы наилучшим образом подходят для систем получения антипротонов путем конверсии протонов на мишени. Так, для получения антипротонов для коллайдера Tevatron (Fermilab, США) используются литиевые линзы радиусом 3 мм, длиной 8 см и током 120 кА, которые фокусируют пучок протонов с энергией 120 ГэВ на никелевую мишень в пятно размером 0,1 мм.

4.8. Аберрации линз с симметрией вращения

Теорию, ограниченную рассмотрением только параксиальных лучей, называют теорией первого порядка. Реально условия параксиальности почти никогда не выполняются, и это приводит к тому, что пучок нельзя сфокусировать в точку. Вычисление искажений изображения (*аббераций*) довольно громоздко, потому ограничимся лишь качественным разбором основных эффектов.

Для нерелятивистской частицы, рожденной вне магнитного поля и движущейся в аксиально-симметричном электростатическом поле ($\dot{\alpha} \equiv 0$), уравнения движения имеют вид (см. систему уравнений (2.15))

$$\ddot{r} = -\eta E_r, \quad \ddot{z} = -\eta E_z. \quad (4.12)$$

Для перехода к независимой переменной z учтем следующую цепочку равенств:

$$v^2 = 2\eta U(r, z) = \dot{r}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2 (1 + r'^2), \quad \dot{z} = \frac{v}{\sqrt{1 + r'^2}},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} = \frac{v}{\sqrt{1 + r'^2}} \frac{d}{dz}.$$

Переписывая с их помощью первое из уравнений (4.12), получаем точное нерелятивистское и свободное от условий параксиальности уравнение радиального движения:

$$r'' - r'(1 + r'^2) \frac{E_z(r, z)}{2U(r, z)} + (1 + r'^2) \frac{E_r(r, z)}{2U(r, z)} = 0,$$

где E_r , E_z – функции координат, даваемые рядами (3.3) и (3.4). Если оборвать эти ряды на линейных членах (3.17), то получим уже известные нам параксиальные уравнения (3.18) и (3.20). Но здесь мы рассмотрим задачу получения уравнений третьего порядка, для чего учтем в разложениях члены третьего порядка включительно:

$$U(r, z) = U_0(z) - \frac{U_0''(z)}{4} r^2, \quad E_z(r, z) = -U_0'(z) + \frac{U_0^{(3)}(z)}{4} r^2,$$

$$E_r(r, z) = \frac{U_0''(z)}{2} r - \frac{U_0^{(4)}(z)}{16} r^3,$$

подставив их в предыдущее уравнение, получим окончательно

$$\begin{aligned} r'' + r' \frac{U_0'}{2U_0} \left[1 + r^2 \left(\frac{U_0''}{4U_0} - \frac{U_0^{(3)}}{4U_0'} \right) + r'^2 \right] + \\ + r \frac{U_0''}{4U_0} \left[1 + r^2 \left(\frac{U_0''}{4U_0} - \frac{U_0^{(4)}}{8U_0''} \right) + r'^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Полученное уравнение является существенно нелинейным, и именно его анализ позволяет определить границу применимости параксиального приближения. Очевидно, что параксиальное приближение становится непригодным, как только начинают существенно проявлять себя нелинейные поправки в квадратных скобках. Все aberrации можно разделить на хроматические и геометрические.

Хроматические aberrации связаны с тем, что скорость частиц в потоке не является величиной строго постоянной, потому изображение всюду размыто и пучок даже в параксиальном приближении нельзя сфокусировать в точку. Это обусловлено нестабильностью источников питания, тепловым разбросом скоростей в термокатоде, взаимодействием частиц с остаточным газом и друг с другом и т.д. Основные способы устранения этих aberrаций заключаются в использовании низкотемпературных термокатодов и стабилизации источников питания.

Геометрические aberrации имеют место даже для монохроматического пучка. Самая существенная из них – так называемая сферическая (рис. 4.11), не исчезающая даже для точечного источника, расположенного на оси линзы. Это есть прямое следствие нелинейной зависимости радиальной силы от радиального размера пучка в линзе (вторая квадратная скобка в (4.13)). Во всех линзах, электростатических и магнитных, периферийные частицы фокусируются ближе к линзе (рис. 4.11). В световой оптике с этим борются подбором стекол с различной дисперсией и комбинацией собирающих и рассеивающих линз,

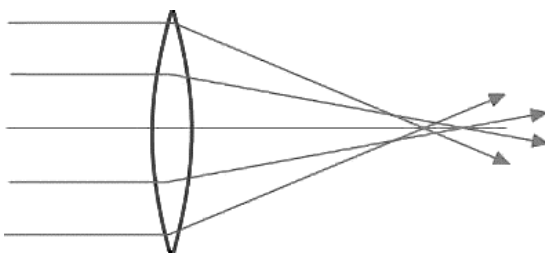


Рис. 4.11. Пример сферической aberrации

у которых многие aberrации имеют разные знаки. Мы знаем, что в электронной оптике, использующей линзы с симметрией вращения, нет рассеивающих линз и этот путь закрыт. Наиболее радикальными средствами борьбы со многими видами геометрических aberrаций являются уменьшение рабочей апертуры (в световой оптике этому соот-

ветствует диафрагмирование) и использование слабых длиннофокусных линз. Магнитные линзы имеют те же aberrации, что и электростатические, и еще большое количество своих собственных.

4.9. Квадрупольные линзы

Рассмотренные выше классические линзы с вращательной симметрией характеризуются тем, что напряженности их полей в рабочей области образуют малые углы со скоростями частиц. В 1952 году Э. Курантом, Х. Снайдером и М. Ливингстоном был предложен принципиально иной тип устройств, у которых силовые линии идут поперек пучка, что весьма существенно усиливает воздействие поля на частицу. Это было достигнуто за счет полного отказа от симметрии вращения. Наибольшее распространение получили квадрупольные линзы (число пар полюсов равно двум), которые мы рассмотрим в основном на примере магнитных линз (рис. 4.12).

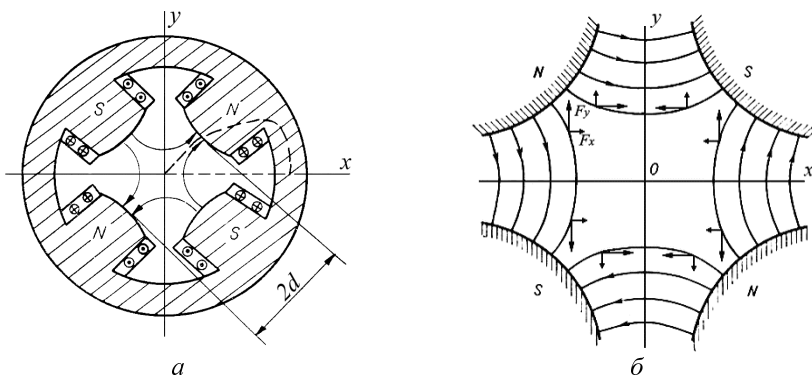


Рис. 4.12. Схемы квадрупольной магнитной линзы (а) и фокусирующих сил (б)

Поперечное сечение магнитного квадрупольного линзы приведено на рис. 4.12, а. Из качественного анализа фокусирующих сил (рис. 4.12, б) следует, что частица испытывает фокусировку по оси x и дефокусировку – по оси y . Если поменять полюса, то по x будет иметь место дефокусировка, а по y – фокусировка. Принципиально важным оказалось

установление того факта, что два стоящих рядом и повернутых на 90° квадруполь при определенных условиях могут обеспечить фокусировку по обеим осям.

Введем на плоскости xu комплексную переменную $w = x + iy = re^{i\varphi}$, тогда комплексный магнитный потенциал квадруполь в рабочей зоне будет аналитической функцией и потому может быть представлен своим рядом Тейлора

$$W(w) = A(w) + iF(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} = W(r, \varphi),$$

где A – векторный магнитный потенциал (который, однако, имеет единственную отличную от нуля компоненту $A = A_z$), F – скалярный магнитный потенциал. Этот ряд содержит лишние члены, которые не удовлетворяют квадрупольной симметрии, и их следует с самого начала исключить. При повороте квадруполь на половину окружности он переходит сам в себя $W(r, \varphi + \pi) = W(r, \varphi)$, этому условию удовлетворяют значения $k = 2, 4, 6, 8, 10, \dots$ При повороте квадруполь на четверть окружности северный полюс переходит в южный и наоборот, соответственно $W(r, \varphi + \pi/2) = -W(r, \varphi)$. Обои типам симметрии удовлетворяют значения $k = 2, 6, 10, \dots$ Окончательно получаем

$$W(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2(2m+1)} (x + iy)^{2(2m+1)} = A(x, y) + iF(x, y). \quad (4.14)$$

Найдем из (4.14) компоненты вектора индукции:

$$B_x = -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} = -2a_2 y - 6a_6 y (5x^4 - 10x^2 y^2 + y^4) - \dots,$$

$$B_y = -\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x} = -2a_2 x - 6a_6 x (x^4 - 10x^2 y^2 + 5y^4) - \dots$$

Из этих представлений видно, что все члены, кроме первого, являются нежелательными нелинейными составляющими (их называют гармониками). Коэффициенты высоких гармоник a_6, a_{10}, \dots зависят только от формы полюсов линзы. В отличие от случая аксиальной

симметрии существует форма полюса, обеспечивающая чисто линейное поле. Введем величину $G = -2a_2$, которая называется градиентом поля линзы и измеряется в гауссах на сантиметр (Гс/см) или в теслах на метр (Тл/м). Если потенциал линзы квадратичный $W = Gw^2/2$, то профили идеальных полюсов, которые находятся из условия $F(x, y) \sim xy = \pm d^2/2 = \text{const}$, оказываются гиперболами. Здесь $2d$ – расстояние между двумя противоположными полюсами (рис. 4.12, а). К сожалению, реализовать такую форму полюсов нельзя, поскольку она не оставляет места для размещения обмотки и ярма для замыкания магнитного потока. На практике оборванную гиперболу стараются аппроксимировать какой-либо подходящей кривой или многоугольником.

Для идеальной (или близкой к ней) линзы имеем

$$B_x = Gy, \quad B_y = Gx, \quad B_z = 0, \quad B = \sqrt{G^2(x^2 + y^2)} = Gr.$$

Видно, что на оси линзы поле равно нулю, при отходе от оси оно линейно нарастает.

Обсудим ситуацию с электростатическими квадрупольными линзами. Такую линзу можно создать, подав на электроды гиперболической формы $x^2 - y^2 = \pm d^2 = \text{const}$ (силы теперь параллельны полю) потенциалы $U_1 = U_0 + \Delta U$, $U_2 = U_0 - \Delta U$ (рис. 4.13). Градиент G_e измеряется в вольтах на метр квадратный (В/м²) или в вольтах на сантиметр квадратный (В/см²). Если электростатическая и магнитная линзы

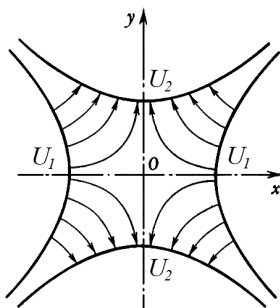


Рис. 4.13. Схема электростатической квадрупольной линзы

создают одну и ту же действующую на частицу силу, то их градиенты связаны соотношением $G_e \left[\text{В/см}^2 \right] = 300 \beta G \left[\text{Гс/см} \right]$. Отсюда видно, что при фокусировке тяжелых частиц или частиц низкой энергии ($\beta \ll 1$) электростатические линзы имеют неоспоримое преимущество. Кроме того, они легкие, их можно точнее изготовить. В физике же частиц высоких энергий, где $\beta \approx 1$, используются исключительно магнитные линзы, которые мы и будем рассматривать далее.

Уравнения движения заряженной частицы в произвольном постоянном магнитном поле можно получить из системы (2.14), исключив из нее электростатическое поле. Перейдем к z как к независимой переменной, для чего воспользуемся соотношениями

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2 \left(1 + x'^2 + y'^2 \right),$$

$$\frac{d}{dt} = \dot{z} \frac{d}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}} \frac{d}{dt}.$$

При этом точные релятивистские уравнения движения частицы с импульсом $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ в произвольном магнитном поле примут вид

$$x'' = \frac{q}{p} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \left[y' B_z - (1 + x'^2) B_y + x' y' B_x \right],$$

$$y'' = -\frac{q}{p} \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \left[x' B_z - (1 + y'^2) B_x + x' y' B_y \right].$$

В общем случае решение этой системы можно получить лишь численными методами, и для анализа траекторий частиц в магнитном идеальном квадруполе ограничимся параксиальным приближением

$$B_x = Gy, \quad B_y = Gx, \quad B_z = 0, \quad x', y' \ll 1, \quad \dot{z}^2 \approx v^2.$$

При этом уравнения движения по поперечным координатам оказываются линейными и не связанными между собой:

$$x'' + \chi(z)x = 0, \quad y'' - \chi(z)y = 0. \quad (4.15)$$

В этих уравнениях фигурирует отвечающая за фокусировку величина (ее называют жесткостью квадруполя)

$$\chi(z) = \frac{q}{p} G(z) = \frac{q}{m_0 c^2} \frac{c}{\gamma \beta} G(z) \left[\text{м}^{-2} \right].$$

В (4.15) подтверждается обнаруженный ранее из качественного анализа факт различных знаков фокусировки по x и y . Заметим попутно, что для электростатического квадруполя

$$\chi_e(z) = \frac{q}{m_0 c^2} \frac{1}{\gamma \beta^2} G_e(z),$$

и χ_e имеет ту же размерность $[\text{м}^{-2}]$, если градиент измерять в вольтах на метр квадратный.

Реальный квадруполь имеет ограниченную протяженность с распределением градиента по оси z , как показано на рис. 4.14. Обычно это распределение заменяют эквивалентным по площади прямоугольником, ему отвечает эффективная длина линзы L .

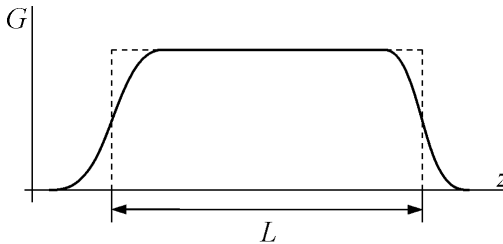


Рис. 4.14. Распределение градиента

Рассмотрим одиночную квадрупольную линзу с градиентом $G = \text{const}$ и $\chi > 0$, она обеспечивает фокусировку по x и дефокусировку по y . Входные координаты частицы обозначим через x_0, x'_0, y_0, y'_0 . В соответствии с уравнениями движения (4.15) в пределах линзы ($z \leq L$) имеем

$$x(z) = x_0 \cos(\sqrt{\chi}z) + \frac{x'_0}{\sqrt{\chi}} \sin(\sqrt{\chi}z),$$

$$x'(z) = -x_0 \sqrt{\chi} \sin(\sqrt{\chi}z) + x'_0 \cos(\sqrt{\chi}z),$$

$$y(z) = y_0 \cosh(\sqrt{\chi}z) + \frac{y'_0}{\sqrt{\chi}} \sinh(\sqrt{\chi}z),$$

$$y'(z) = y_0 \sqrt{\chi} \sinh(\sqrt{\chi}z) + y'_0 \cosh(\sqrt{\chi}z).$$

Как и следует ожидать из линейности уравнений (4.15), движение в квадруполе можно описать при помощи матриц

$$M_+ = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\chi}z) & \sin(\sqrt{\chi}z)/\sqrt{\chi} \\ -\sqrt{\chi} \sin(\sqrt{\chi}z) & \cos(\sqrt{\chi}z) \end{bmatrix},$$

$$M_- = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{\chi}z) & \sinh(\sqrt{\chi}z)/\sqrt{\chi} \\ \sqrt{\chi} \sinh(\sqrt{\chi}z) & \cosh(\sqrt{\chi}z) \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Поскольку присутствует только магнитное поле, то $\det M_+ = \det M_- = 1$.

Из матриц (4.16) можно вычислить фокусные расстояния и координаты узловых точек квадрупольной линзы в собирающей и рассеивающей плоскостях:

$$\frac{1}{f^+} = \sqrt{\chi} \sin(\sqrt{\chi}L),$$

$$h_2^+ = -h_1^+ = \frac{1 - \cos(\sqrt{\chi}L)}{-\sqrt{\chi} \sin(\sqrt{\chi}L)} = -\frac{\tan(\sqrt{\chi}L/2)}{\sqrt{\chi}},$$

$$\frac{1}{f^-} = -\sqrt{\chi} \sinh(\sqrt{\chi}L),$$

$$h_2^- = -h_1^- = \frac{1 - \cosh(\sqrt{\chi}L)}{\sqrt{\chi} \sinh(\sqrt{\chi}L)} = -\frac{\tanh(\sqrt{\chi}L/2)}{\sqrt{\chi}}.$$

Если набег фазы в квадрупольной линзе мал ($\sqrt{\chi}L \ll 1$ – слабая линза), то такая линза эквивалентна расположенной посередине нее тонкой квадрупольной линзе с фокусными расстояниями

$$f^+ = -f^- = f \approx \frac{1}{\chi L}.$$

4.10. Дуплеты и триплеты квадрупольных линз

Одиночная квадрупольная линза фокусирует по одному и дефокусирует по другому из двух поперечных направлений. Поэтому их применяют в виде систем, состоящих из двух (*дуплет*) или трех (*триплет*) линз. Такие устройства, состоящие из нескольких линз и формирующие действительное изображение предмета, в оптике называют *линзовыми объективами*. Простейшим объективом является дуплет, состоящий из двух тонких одинаковых квадрупольных линз – фокусирующей и дефокусирующей (по выбранному поперечному направлению), отстоящих одна от другой на расстояние d .

Матрица преобразования дуплета имеет вид

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix},$$

если первой в дуплете стоит фокусирующая линза. Результат перемножения матриц дает

$$M_D = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{d}{f^2} & 1 + \frac{d}{f} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем фокусное расстояние и координаты узловых точек дуплета:

$$f_D = f^2/d, \quad h_1 = h_2 = -f. \quad (4.17)$$

Если первой в дуплете помещена дефокусирующая линза, в (4.17) надо изменить знак f . Таким образом, дуплет имеет положительное фокусное расстояние (фокусирует) независимо от порядка расположения линз, т.е. в обеих плоскостях x и y :

$$f_{D,x} = f_{D,y} > 0.$$

Показать, что дуплет всегда фокусирует, можно и не прибегая к формулам. Действительно, радиальные силы пропорциональны расстоянию от оси линзы. Как нетрудно видеть из рис. 4.15, фокусирующий участок частица проходит всегда на большем расстоянии, чем дефокусирующий, что и обеспечивает «победу» фокусировке.

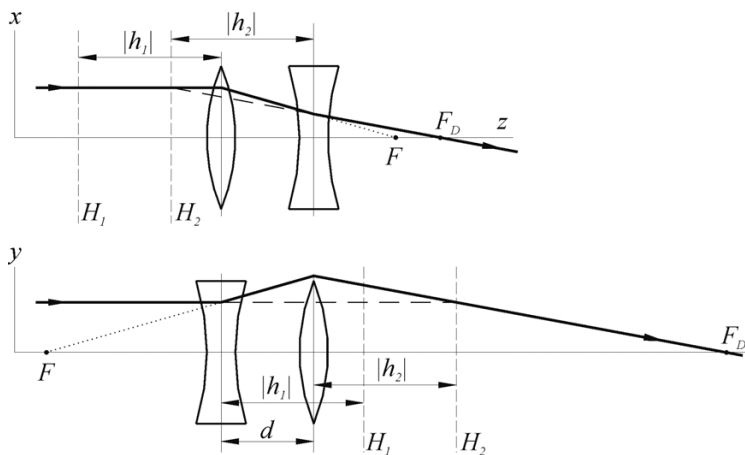


Рис. 4.15. Траектория частицы в дуплете квадрупольных линз:

H_1, H_2 – передняя и задняя главные плоскости; F_D – задний фокус дуплета;
 F – фокус первой линзы дуплета

Главные плоскости для x -координаты располагаются зеркально симметрично главным плоскостям y -координаты, а плоскостью симметрии служит средняя плоскость дуплета.

Из рис. 4.15 ясно, что несмотря на равенство фокусных расстояний фокусы по x - и по y -координатам существенно разнятся, что приводит к сильному астигматизму изображения. Этот недостаток слабее проявляется в триплете – системе из трех линз, из которых

две крайние одинаковы и расположены симметрично относительно средней. Матрица такого триплета есть результат перемножения пяти матриц:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь f и F – фокусные расстояния тонких крайних и средней линз соответственно. Перемножив матрицы, получим элементы матрицы M_T :

$$A = 1 - d \left(\frac{2}{f} + \frac{1}{F} \right) + \frac{d^2}{fF} = D,$$

$$B = d \left(2 - \frac{d}{F} \right), \quad (4.18)$$

$$C = - \left(\frac{2}{f} + \frac{1}{F} \right) + \frac{2d}{f} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{F} \right) - \frac{d^2}{Ff^2}.$$

Для триплета из квадрупольных линз при переходе к другой координате достаточно поменять знаки f и F на противоположные. Поэтому фокусные расстояния по x и по y будут одинаковы, если в выражении для матричного элемента C будут содержаться только члены с f^2 и Ff . Для этого нужно выбрать параметры триплета таким образом, чтобы они удовлетворяли равенству

$$\frac{2}{f} + \frac{1}{F} + \frac{d^2}{Ff^2} = 0, \quad F = -\frac{f}{2} \left(1 + \frac{d^2}{f^2} \right),$$

т.е. средняя линза симметричного триплета должна быть дефокусирующей, если крайние линзы фокусирующие, и наоборот. Подставив это значение F в выражение (4.18), получим элементы матрицы симметричного триплета, у которого фокусные расстояния по x - и по y -координате одинаковы:

$$A = 1 - 2p^2 \frac{1+p}{1+p^2} = D,$$

$$B = 2d \left(1 + \frac{p}{1+p^2} \right), \quad p = \frac{d}{f},$$

$$C = -\frac{1}{f_T} = -\frac{2p}{f} \frac{1-p^2}{1+p^2}.$$

Из последнего выражения следует, что триплет фокусирует, если $p < 1$, т.е. $f > d$.

«Симметричный» триплет не является полностью симметричным (рис. 4.16), поскольку положение его главных плоскостей задается величинами

$$h_1 = -h_2 = f \frac{p}{1-p} = \frac{d}{1-p},$$

значение которых зависит от знака f и соответственно p . С уменьшением p триплет все больше симметризуется, при этом $F \rightarrow -f/2$, $h_1 = -h_2 \rightarrow d$.

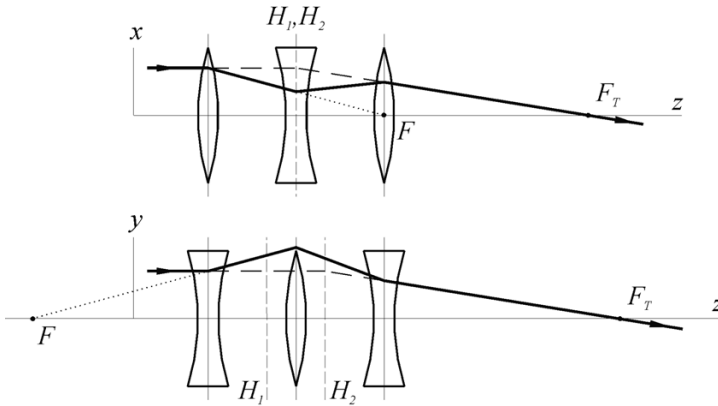


Рис. 4.16. Траектория частицы в симметричном квадрупольном триплете (случай $p = 0,5$):

обозначения те же, что и на рис. 4.15

Задания

4.1. Доказать выражение (4.4).

4.2. Доказать выражение (4.5).

4.3. Найти матрицу преобразования ускоряющего зазора длиной d . Потенциал пространства в начале зазора – U_1 , в конце – U_2 .

4.4. Доказать соотношение (4.10).

4.5. Найти матрицу преобразования тонкой иммерсионной линзы.

4.6. Найти фокусное расстояние электростатической линзы, образованной ускоряющим зазором с однородным полем. Длина зазора 7 см, потенциал на входе в зазор 5 кВ, на выходе – 15 кВ. Обязательно учесть фокусировку на входе в поле и выходе из него.

4.7. Вывести фокусное расстояние тонкой магнитной линзы из уравнения (3.21), используя рассуждения, аналогичные приведенным при вычислении фокусного расстояния тонкой электростатической линзы.

4.8. Через катушку с числом витков $N = 10$ пропускается ток $I = 50$ А. Приближенно катушка представляет собой тонкий виток с радиусом $r_0 = 10$ см. Найти фокусное расстояние для пролетающих сквозь нее электронов с кинетической энергией $W = 50$ кэВ.

4.9. Рассчитать фокусное расстояние литиевой линзы радиусом a , длиной L . Ток в линзе I , кинетическая энергия фокусируемых частиц $W \gg E_0$.

4.10. Рассчитать градиент поля идеальной магнитной квадрупольной линзы, если известно, что расстояние между двумя противоположными полюсами равно $2d$. Ток в обмотках I , число обмоток N .

4.11. Рассчитать градиент поля идеальной электростатической квадрупольной линзы. Известно, что расстояние между двумя противоположными полюсами равно $2d$, разность потенциалов между соседними полюсами равна $2\Delta U$.

5. ПОТОКИ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

5.1. Канонические уравнения Гамильтона, теорема Лиувилля

На практике чаще всего возникает задача формирования потоков заряженных частиц, а вычисление отдельных траекторий требуется редко. Хотя эти траектории и впредь будут играть определенную роль, необходимо ознакомиться с описанием свойств коллективов частиц. Отложим на время учет кулоновского взаимодействия частиц самого потока, т.е. будем считать плотность заряда пренебрежимо малой.

При выводе основных уравнений движения был использован тот факт, что вся информация о динамической системе содержится в функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$, а применение к ней принципа наименьшего действия привело нас к уравнениям (2.1). Существует другая скалярная функция – функция Гамильтона, которая также может быть положена в основу аналитической механики. Эту функцию (мы сталкивались с ее частным случаем в формуле (2.4)) можно представить так:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t) = \sum_{n=1}^N P_n \dot{x}_n - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t), \quad (5.1)$$

где надо выразить скорости через обобщенные импульсы. Это можно сделать с помощью системы уравнений (см. формулу (2.2))

$$P_n = \frac{\partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)}{\partial \dot{x}_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

которая в принципе позволяет найти все обобщенные скорости как функции обобщенных координат, импульсов и времени $\dot{x}_n = \dot{x}_n(\mathbf{x}, \mathbf{P}, t)$.

Рассматривая левую часть (5.1) как функцию координат, импульсов и времени, имеем

$$dH = \sum_{n=1}^N \frac{\partial H}{\partial x_n} dx_n + \sum_{n=1}^N \frac{\partial H}{\partial P_n} dP_n + \frac{\partial H}{\partial t} dt .$$

Дифференцируя правую часть того же равенства (5.1), с учетом (2.1) и (2.2) получаем

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{n=1}^N \dot{x}_n dP_n + \sum_{n=1}^N P_n d\dot{x}_n - \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} d\dot{x}_n - \sum_{n=1}^N \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= \sum_{n=1}^N \dot{x}_n dP_n - \sum_{n=1}^N \dot{P}_n dx_n - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned}$$

Сравнивая два последних равенства, находим

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial P_n}, \quad \dot{P}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad n = 1, 2, \dots, N . \quad (5.2)$$

Уравнения (5.2) в силу их простоты и симметрии называются *каноническими уравнениями Гамильтона*. Они образуют систему $2N$ уравнений первого порядка, эквивалентную уравнениям Лагранжа (2.1). Любая пара переменных x_n, P_n называется *канонически сопряженной парой*.

Вернемся к релятивистскому лагранжиану частицы в стационарном поле:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - qU(\mathbf{r}),$$

и получим эквивалентный ему гамильтониан. Обобщенный импульс есть

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} . \quad (5.3)$$

С другой стороны, для гамильтониана согласно (5.1) имеем уравнение

$$H = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + qU ,$$

которое надо записать через обобщенный импульс \mathbf{P} по формуле (5.3). С помощью (5.3) нетрудно проверить равенство

$$\left(\frac{H - qU}{c} \right)^2 = m_0^2 c^2 + (\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2,$$

откуда находим

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = c \sqrt{m_0^2 c^2 + (\mathbf{P} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2} + qU(\mathbf{r}).$$

Важно подчеркнуть, что входящие в лагранжиан скорости \dot{x}_n являются полными производными соответствующих координат x_n , поэтому переменные x_n и \dot{x}_n зависимы. В методе Гамильтона канонически сопряженные величины x_n , P_n оказываются независимы и полностью равноправны, что при рассмотрении общих вопросов механики имеет серьезные преимущества. В первую очередь это связано с понятием фазового пространства и теоремой Лиувилля.

Состояние динамической системы с N степенями свободы в каждый момент времени определяется заданием N обобщенных координат и N обобщенных импульсов. Поскольку они независимы и равноправны, можно считать это указанием точки с декартовыми координатами $(x_1, \dots, x_N, P_1, \dots, P_N)$ в $2N$ -мерном пространстве (Д.У. Гиббс назвал его *фазовым пространством*, а его точки – представляющими точками). Для невзаимодействующих частиц $N = 3$ и фазовое пространство называется шестимерным. Эволюции динамической системы в реальном пространстве-времени отвечает фазовая траектория, представляющая эту систему в фазовом пространстве.

Предположим, что вдоль оси z в стационарном поле распространяется сгусток невзаимодействующих заряженных частиц. Каждой такой частице соответствует точка $(\mathbf{x} = (x, y, z), \mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z))$, представляющая ее в фазовом пространстве, а все частицы представлены в данный момент времени шестимерным фазовым объемом V_p . Пусть элемент фазового объема dV_p , располагающийся вокруг точки фазового

пространства (\mathbf{x}, \mathbf{P}) , содержит dN частиц. Введем понятия фазовой плотности

$$n_p(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \lim_{dV_p \rightarrow 0} \frac{dN}{dV_p}$$

и фазовой скорости

$$\mathbf{v}_p(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{P}_x, \dot{P}_y, \dot{P}_z) = (\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{P}}),$$

с помощью которых можно определить плотность тока представляющих частиц

$$\mathbf{j}_p(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = n_p \mathbf{v}_p.$$

Шестимерный фазовый объем V_p , представляющий рассматриваемый ступок, заключен в пятимерную поверхность Σ . Поскольку представляющие точки не рождаются и не погибают, изменение этого объема во времени может происходить только за счет их прохождения через поверхность Σ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} n_p dV_p = - \oint_{\Sigma} \mathbf{j}_p \cdot d\mathbf{\Sigma} = - \int_{V_p} \operatorname{div}(n_p \mathbf{v}_p) dV_p.$$

Мы использовали здесь теорему Остроградского–Гаусса о связи потока вектора через поверхность с интегралом дивергенции этого вектора по объему. Отсюда следует соотношение

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \operatorname{div}(n_p \mathbf{v}_p) = 0, \quad (5.4)$$

которое есть уравнение непрерывности, отражающее факт неуничтожимости частиц. Раскроем стоящее под знаком дивергенции выражение

$$\operatorname{div}(n_p \mathbf{v}_p) = \mathbf{v}_p \cdot \operatorname{grad} n_p + n_p \operatorname{div} \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p \cdot \operatorname{grad} n_p.$$

Последнее равенство учитывает то обстоятельство, что дивергенция фазовой скорости в любой гамильтоновой системе тождественно

равна нулю. Действительно, в силу уравнений Гамильтона (5.2) находим

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right) \equiv 0.$$

Этот факт позволяет превратить уравнение непрерывности (5.4) в уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \mathbf{v}_p \cdot \operatorname{grad} n_p = 0.$$

Но это выражение есть полная производная по времени фазовой плотности, измеряемой вдоль фазовой траектории (см. формулу (1.10)). Ее равенство нулю означает, что фазовая плотность представляющих точек в процессе эволюции системы остается постоянной, соответственно остается постоянным и объем области, содержащий представляющие точки:

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) n_p = \frac{dn_p}{dt} = 0, \quad n_p = \operatorname{const}, \quad V_p = \operatorname{const}. \quad (5.5)$$

Соотношения (5.5) составляют содержание *теоремы Лиувилля*: фазовый объем гамильтоновой системы является абсолютным инвариантом. Этот закон сохранения, как и закон постоянства энергии в изолированной системе, – один из важнейших законов физики. Из теоремы Лиувилля, в частности, следует, что всякое уменьшение разброса частиц по координатам (сжатие пучка) вызывает увеличение разброса по импульсам, и наоборот.

Важно подчеркнуть, что гамильтоновость – единственное требование, необходимое и достаточное для справедливости теоремы Лиувилля. Гамильтоновыми могут быть системы, подверженные действию сил, зависящих от времени, нелинейных сил, но не диссипативных. Диссипативные силы возникают при наличии в системе трения, потерь энергии на излучение, соударения с другими телами и зависят от проекции скорости на направление силы. Их учет потребовал бы введения в потенциальную часть гамильтониана производных от своих переменных (координат), которых в гамильтониане быть не должно. Диссипативные силы отсутствуют в потенциальных полях, где силы вообще не зависят от скоростей. Зависящая от скорости сила Лоренца

$q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ не является диссипативной, поскольку скорость здесь перпендикулярна к силе.

Уравнения Гамильтона определяют динамику представляющих точек в фазовом пространстве, т.е. зависимость канонически сопряженных переменных (\mathbf{x}, \mathbf{P}) в последующие моменты времени от их начальных значений:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{P}_0). \quad (5.6)$$

Рассмотрим малую область в фазовом пространстве, которая в момент времени t_0 занимает объем dV_0 и которая в момент t_1 переходит в область объемом dV_1 . Известно, что отношение dV_1/dV_0 равно якобиану преобразования (5.6). Из теоремы Лиувилля следует, что величина фазового объема гамильтоновой системы не изменяется, следовательно, этот якобиан равен единице

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}_0} & \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{P}_0} \\ \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial \mathbf{x}_0} & \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial \mathbf{P}_0} \end{vmatrix} = 1.$$

В случае линейности уравнений Гамильтона связь между начальными и конечными канонически сопряженными переменными можно выразить при помощи матрицы перехода

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{P}_0 \end{bmatrix}.$$

В этом случае единице равен определитель матрицы перехода: $\det M = 1$.

5.2. Поперечный фазовый объем и проблема согласования

Довольно часто движение по одним степеням свободы является независимым от движения по остальным степеням. В этом случае сохраняется фазовый объем каждого подпространства отдельно. Часто

такими независимыми движениями оказываются продольное (по z) и поперечное (по x и y) движения. Движение по поперечным координатам, в свою очередь, может быть связанным (например, в случае наличия аксиально-симметричного магнитного поля) или может осуществляться независимо (например, в квадрупольных линзах).

Рассмотрим x -движение (y -движение исследуется аналогично). *Двумерным фазовым объемом* пучка в плоскости канонических переменных xP_x называют величину

$$V_{px} = \frac{1}{\pi m_0 c} \iint dx dP_x,$$

где интеграл берется по всей занятой представляющими точками площади. Если движение по x независимо, то V_{px} является сохраняющейся величиной. Вместо плоскости xP_x гораздо удобнее использовать плоскость xx' , поскольку измерять угол x' траектории проще, чем импульс частицы. Иногда эту плоскость называют *фазовой плоскостью*. Деленная на π площадь, занимаемая пучком на этой плоскости,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\pi} \iint dx dx'$$

называется *эмиттансом* – это одна из важнейших характеристик пучка. Важно помнить, что в отличие от двумерного фазового объема эмиттанс изменяется при изменении энергии пучка, поскольку он определен на плоскости переменных, которые не являются канонически сопряженными. Поэтому часто используют *нормализованный эмиттанс*

$$\varepsilon_{n,x} = \beta\gamma \varepsilon_x.$$

В параксиальном приближении при отсутствии продольного магнитного поля нормализованный эмиттанс $\varepsilon_{n,x}$ совпадает с V_{px} и соответственно остается постоянным при ускорении или замедлении пучка.

На рис. 5.1, *а, б* показаны два потока с нулевым эмиттансом, не подверженные действию внешних сил. В первом случае строго параллельный пучок в любом сечении представляется на фазовой плоскости xx' отрезком, лежащим на оси x . Площадь отрезка, конечно, равна нулю. В случае линейно расходящегося пучка его представление на плоскости xx' изменяется в зависимости от положения сече-

ния вдоль оси z , оставаясь отрезком. Третий пример (рис. 5.1, в) относится к пучку с конечным эмиттансом в свободном пространстве, который на плоскости $x x'$ представляется эллипсом. Хотя такой поток состоит из невзаимодействующих частиц, траектория каждой из которых есть прямая линия, его огибающая выглядит так, как будто внутри него действуют расталкивающие силы. В сечении 2 огибающая потока имеет минимальный размер (*кроссовер*). Последний пример, изображенный на рис. 5.1, з, показывает, что происходит с потоком

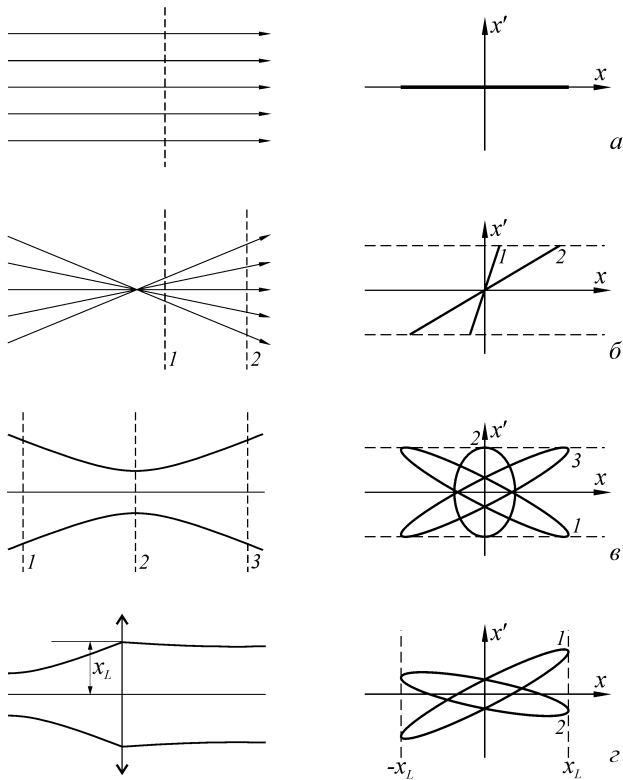


Рис. 5.1. Схемы потоков невзаимодействующих частиц и их представление на фазовой плоскости:

a и \bar{b} – потоки с нулевым эмиттансом; v – поток с конечным эмиттансом, 1–3 – сечения потока; z – линза на пути потока с конечным эмиттансом, 1 – поток перед линзой, 2 – после линзы

(и его представлением на фазовой плоскости), на пути которого поставлена тонкая линза. Поскольку в тонкой линзе радиальный размер измениться не успеваеет, границы пучка вдоль оси x до и после линзы равны $\pm x_L$. Линза не действует на проходящие через ее центр траектории, поэтому все эллипсы пересекают ось x' в одних и тех же точках. Этот пример также показывает, что линза может существенно изменять форму представления (но не площадь!), что оказывается полезным при решении проблемы согласования потока с каналом.

Можно отметить два основных проявления ненулевого эмиттанса. Во-первых, присутствие неупорядоченного разброса скоростей не позволяет собрать пучок в точечный фокус. Во-вторых, поскольку в пучке с конечным эмиттансом всегда есть частицы со скоростью, направленной наружу, такой пучок расплывается в свободном пространстве, т.е. разброс скоростей частиц проявляет себя как дефокусирующий фактор.

Откуда берется конечный фазовый объем? Первая причина – неупорядоченный разброс скоростей частиц по всем трем степеням свободы, связанный с их тепловым движением. Если продольной тепловой компонентой скорости почти всегда можно пренебречь (она на несколько порядков меньше регулярной составляющей), то поперечные тепловые компоненты могут существенно влиять на поведение потока. Естественно, что величина теплового разброса скоростей частиц определяется обстоятельствами их рождения. Так, если поток электронов создается термокатодом с температурой порядка $1000\text{ }^\circ\text{C}$ ($\sim 0,1\text{ эВ}$), то тепловой разброс весьма мал, и в большинстве случаев фазовый объем можно считать равным нулю. Картина резко изменится, если поток электронов с тем же током извлечь из плазменного источника с электронной температурой $T_e \sim 10\dots 100\text{ эВ}$. Фазовый объем потоков ионов, получаемых, как правило, именно из плазменных источников, необходимо учитывать практически всегда.

Во-вторых, фазовый объем увеличивается при взаимодействии частиц пучка с веществом (сеткой, фольгой, ионами остаточного газа, конверсионной мишенью). Как отмечалось, это диссипативные процессы многократного рассеяния, нарушающие теорему Лиувилля. Частицы при прохождении сквозь тонкую мишень в среднем рассеиваются на некоторый угол (поперечный размер потока практически не изменяется), что и приводит к появлению конечного фазового объема; этот процесс схематически показан на рис. 5.2. Именно такой эффект имеет место при прохождении частиц сквозь стенки линзы Будкера.

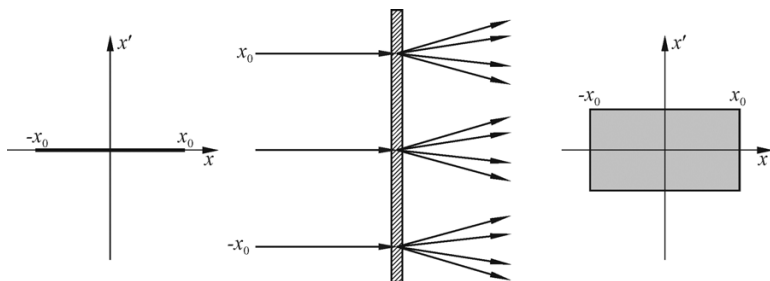


Рис. 5.2. Увеличение эмиттанса пучка вследствие рассеяния на тонкой мишени

Рассмотрим некий канал транспортировки потока заряженных частиц и изучим его пропускные возможности по поперечным степеням свободы. С этой целью будем подавать на его вход частицы со всевозможными значениями x , x' . Одни из них пройдут канал, другие погибнут в нем. Представляющие точки прошедших частиц заполняют на фазовой плоскости xx' некоторую область пропускания, площадь которой, деленная на π , носит название *акцептанс канала по x* (рассмотрение по y проводится аналогично). Пока, не ставя задачу понять, как связан акцептанс канала с его устройством, выясним, как соотносится акцептанс канала с эмиттансом инжектируемого в этот канал потока (рис. 5.3). Видно, что пропустить поток через канал без потерь можно, лишь если представление пучка на фазовой плоскости целиком находится внутри области пропускания. Обеспечение этого условия

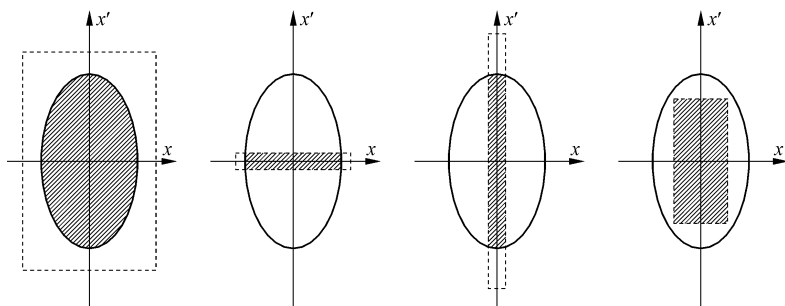


Рис. 5.3. Отношения акцептанса канала (эллипс) и эмиттанса потока; заштрихованная область – доля прошедших канал частиц

составляет содержание так называемой проблемы согласования потока с каналом. Для ее решения часто приходится между инжектором и каналом размещать специальную систему (набор линз) с единственной целью – согласовать форму эмиттанта потока с акцептансом канала. Таким образом, акцептанс есть максимально возможный эмиттанс пропускаемого каналом согласованного потока.

5.3. Распределение пучка на фазовой плоскости

Из сформулированной выше проблемы согласования эмиттанта пучка с акцептансом канала очевидно, что важна не только площадь области, занятой пучком на фазовой плоскости, но и ее форма. Если на этой плоскости ввести плотность частиц $n(x, x')$, то представление пучка можно описать при помощи нормированной функции распределения

$$f(x, x') = \frac{n(x, x')}{N},$$

где N – полное число частиц. Условие нормировки функции $f(x, x')$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int f(x, x') dx dx' = 1.$$

Ниже рассмотрены три наиболее характерных распределения.

Ступенчатое распределение

Пусть пучок на плоскости xx' образует равномерно заполненный эллипс (рис. 5.4). Наиболее удобным способом эллипс можно задать, введя параметры α , β , γ и ε . Если взять квадратичную форму

$$\Phi(x, x') = \gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2,$$

то уравнение

$$\Phi(x, x') = \varepsilon \tag{5.7}$$

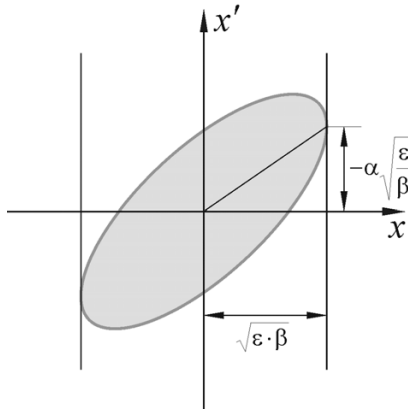


Рис. 5.4. Представление пучка – равномерно заполненный эллипс

как раз и будет определять эллипс. В этом определении параметр ϵ определяет размер эллипса, а параметры α , β , γ – его сжатие и наклон. Видно, что из трех параметров α , β , γ независимыми являются лишь два, связь между ними может быть выбрана следующим образом:

$$\gamma\beta - \alpha^2 = 1.$$

При этом параметр ϵ численно равен площади эллипса, деленной на π , что совпадает с определением эмиттанса, данным ранее.

Условие $\Phi(x, x') > \epsilon$ определяет те точки, которые находятся снаружи эллипса, для точек внутри эллипса $\Phi(x, x') < \epsilon$. Соответственно, плотность частиц на фазовой плоскости при ступенчатом распределении можно описать как

$$f(x, x') = A \cdot V\left(-(\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2) + \epsilon\right),$$

где $V(x)$ – функция Хевисайда:

$$V(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Множитель A определяется из условия нормировки. Поскольку площадь эллипса $S_e = \pi\varepsilon$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int f(x, x') dx dx' = A \cdot S_e = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\pi\varepsilon}.$$

Нормированная плотность частиц вдоль x вычисляется следующим образом:

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, x') dx' = \frac{2}{\pi\sqrt{\varepsilon\beta}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\varepsilon\beta}} \cdot V(\varepsilon\beta - x^2).$$

Распределение Капчинского–Владимирского

При распределении Капчинского–Владимирского частицы пучка равномерно заполняют поверхность четырехмерного эллипсоида в пространстве $xx'yy'$:

$$f(x, x', y, y') = A\delta\left(\frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x xx' + \beta_x x'^2}{\varepsilon_x} + \frac{\gamma_y y^2 + 2\alpha_y yy' + \beta_y y'^2}{\varepsilon_y} - 1\right). \quad (5.8)$$

Такое распределение иногда называют микроканоническим, по аналогии с микроканоническим распределением Гиббса из статистической физики, которое описывает распределение вероятностей различных состояний замкнутой макроскопической системы.

Для нахождения плотности $\rho(x, y)$ преобразуем квадратичную форму:

$$\begin{aligned} \gamma_x x^2 + 2\alpha_x xx' + \beta_x x'^2 &= \beta_x \left(x' + \frac{\alpha_x}{\beta_x} x\right)^2 - \\ - \frac{\alpha_x^2}{\beta_x} x^2 + \gamma_x x^2 &= \beta_x \left(x' + \frac{\alpha_x}{\beta_x} x\right)^2 + \frac{x^2}{\beta_x}, \end{aligned}$$

и осуществим замену переменных:

$$\xi^2 = \frac{\beta_x}{\varepsilon_x} \left(x' + \frac{\alpha_x}{\beta_x} x \right)^2, \quad \eta^2 = \frac{\beta_y}{\varepsilon_y} \left(y' + \frac{\alpha_y}{\beta_y} y \right)^2.$$

После этого безразмерную плотность легко найти:

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\xi^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_x \beta_x} + \eta^2 + \frac{y^2}{\varepsilon_y \beta_y} - 1 \right) d\xi d\eta = \\ &= A \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(r^2 + \frac{x^2}{\varepsilon_x \beta_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y \beta_y} - 1 \right) dr^2 = \\ &= A \pi \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} V \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon_x \beta_x} - \frac{y^2}{\varepsilon_y \beta_y} \right); \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, y) dx dy = A \pi \sqrt{\frac{\varepsilon_x \varepsilon_y}{\beta_x \beta_y}} \pi \sqrt{\varepsilon_x \beta_x \varepsilon_y \beta_y} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi^2 \varepsilon_x \varepsilon_y}.$$

Оказывается, что поперечное сечение пучка есть равномерно заполненный эллипс, ориентированный по осям x и y (рис. 5.5). Проекции фазового объема на плоскости $x x'$ и $y y'$ также являются равномерно заполненными эллипсами (ступенчатое распределение).

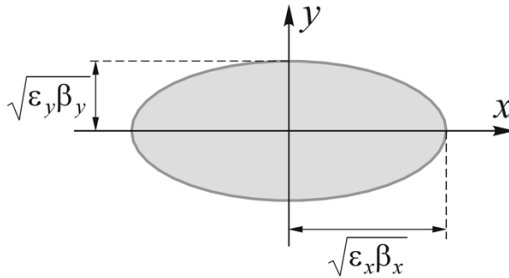


Рис. 5.5. Поперечное сечение пучка, который имеет распределение Капчинского–Владимирского

Гауссово распределение

Реальные пучки нечасто имеют резко очерченные границы, и для описания распределения плотности таких пучков на фазовой плоскости больше подходит гауссово распределение

$$f(x, x') = A \cdot \exp\left(-\frac{\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2}{2\varepsilon}\right).$$

В этом случае нормировочный множитель равен

$$A = \frac{1}{2\pi\varepsilon}.$$

Отсутствие у реального пучка четких границ на фазовой плоскости приводит к тому, что часть тока пучка (пусть и небольшая) теряется даже при достаточно большом акцептансе системы. Гауссово распределение позволяет численно оценить эти потери и найти оптимальный баланс между хорошим токопрохождением и разумным акцептансом установки.

5.4. Среднеквадратичный эмиттанс

На практике часто известны вторые моменты распределения пучка на фазовой плоскости: $\langle x^2 \rangle$, $\langle x x' \rangle$, $\langle x'^2 \rangle$. Возможно ли по ним восстановить значение эмиттанса? Вычислим эти вторые моменты для ступенчатого распределения:

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, x') dx dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x) dx = \frac{\varepsilon\beta}{4}, \\ \langle x'^2 \rangle &= \frac{\varepsilon\gamma}{4}, \quad \langle x x' \rangle = -\frac{\varepsilon\alpha}{4}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что эмиттанс пучка, имеющего на фазовой плоскости ступенчатое распределение, можно найти как

$$\varepsilon = 4\varepsilon_{rms}, \quad \varepsilon_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle x x' \rangle^2}.$$

Введенная величина ε_{rms} оказалась очень удобной и полезной при изучении динамики пучков заряженных частиц. Она получила название *среднеквадратичного эмиттанса*. В отличие от обычного среднеквадратичный эмиттанс сохраняется только при линейном движении, однако у него имеются следующие преимущества.

1. Для пучка, который на фазовой плоскости xx' представляет собой изогнутую линию, обычный эмиттанс равен нулю (рис. 5.6). Однако он проявляет такие же свойства, как и пучок с ненулевым эмиттансом: при помощи только линейных систем его нельзя сфокусировать в одну точку или сделать не расширяющимся в свободном пространстве. Среднеквадратичный же эмиттанс такого пучка не равен нулю, что отражает упомянутые свойства.

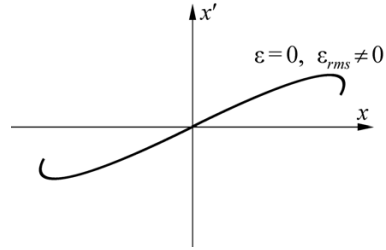


Рис. 5.6. Пучок с нулевым эмиттансом на фазовой плоскости

2. При движении в нелинейной системе эмиттанс остается неизменным. Однако при этом часто растет эффективная площадь, занимаемая пучком (о чем подробнее будет рассказано в следующей части курса). Среднеквадратичный эмиттанс также растет, что хорошо отражает этот процесс.

Особенно широко ε_{rms} используется в вычислительных программах, которые рассчитывают движение ансамбля частиц в системе. При этом пучок на плоскости xx' представляется в виде набора точек, по которому можно рассчитать вторые моменты распределения. Попробуем подобрать такой угол θ (рис. 5.7), который бы минимизировал

среднеквадратичное расстояние $\langle d^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2$ от точек до оси \tilde{x} .

Этому условию отвечает угол

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \sum (x_i x'_i)}{\sum (x_i^2 - x_i'^2)}.$$

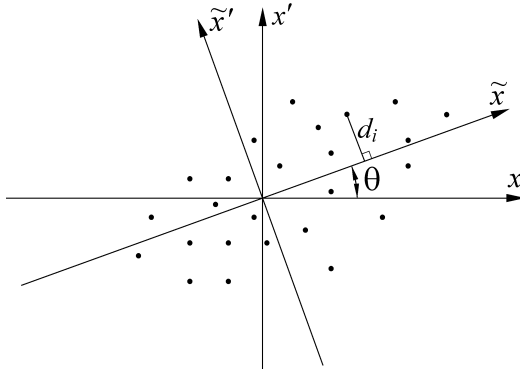


Рис. 5.7. Поворот системы координат для минимизации $\langle d^2 \rangle$

В повернутой на этот угол системе координат можно вычислить $\tilde{x}_{rms} = \sqrt{\langle \tilde{x}^2 \rangle}$ и $\tilde{x}'_{rms} = \sqrt{\langle \tilde{x}'^2 \rangle}$. Оказывается, что

$$\tilde{x}_{rms} \tilde{x}'_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} = \varepsilon_{rms}.$$

Это выражение дополнительно проясняет смысл среднеквадратичного эмиттанса.

Задания

5.1. Пусть пучок имеет на фазовой плоскости гауссово распределение с параметрами α , β , γ и ε . Найти распределение плотности $\rho(x)$. Найти, какая часть пучка проходит через щелевую диафрагму шириной $2\sqrt{\varepsilon\beta}$.

5.2. Пусть пучок имеет на фазовой плоскости гауссово распределение с параметрами α , β , γ и ε . Найти, какая доля тока пучка содержится внутри эллипса, ориентированного по α , β , γ с площадью $S = 4\pi\varepsilon$.

5.3. Найти среднеквадратичный эмиттанс гауссового распределения.

6. ДИНАМИКА ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕНУЛЕВЫМ ЭМИТТАНСОМ

6.1. Расплывание пучка в свободном пространстве

При исследовании динамики потоков заряженных частиц в каналах, составленных из многих линз, наибольший интерес представляют не траектории отдельных частиц, а огибающие потока, поскольку именно они определяют размеры потока в каждой точке канала. Огибающие, в свою очередь, определяются действующими в канале силами, а также величиной и формой фазовых объемов.

Наличие у потока частиц ненулевого эмиттанта приводит к тому, что даже в свободном от внешних полей пространстве его размеры увеличиваются. Рассмотрим простейший пример – пусть пучок с эмиттансом ε имеет в кроссовере размер $2x_0$. Найдем огибающую пучка $x_{\max}(z)$ с учетом того, что на фазовой плоскости граница пучка представляет собой эллипс.

Достаточно очевидно, что в кроссовере эллипс на фазовой плоскости ориентирован по осям x и x' , т.е. не имеет наклона. Тогда уравнение эллипса в кроссовере записывается в каноническом виде

$$\gamma_0 x_0^2 + \beta_0 x_0'^2 = \varepsilon,$$

коэффициент $\alpha = 0$. Из того, что $x_{\max} = \sqrt{\varepsilon\beta}$ (см. рис. 5.4), находим $\beta_0 = x_0^2/\varepsilon$. Из условия $\gamma\beta - \alpha^2 = 1$ находим $\gamma_0 = 1/\beta_0 = \varepsilon/x_0^2$.

При движении вдоль z фазовый портрет пучка изменяется, соответственно изменяется его размер. Но мы знаем, что движение в свободном пространстве – линейное, описываемое матрицей

$$M(0|z) = \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Как и всякое линейное преобразование, это движение переводит эллипс в эллипс, причем если какая-либо точка лежала внутри эллипса, то и после преобразования она снова окажется внутри; площадь эллипса сохраняется. Поэтому для нахождения границы пучка достаточно знать, как изменяются параметры граничного эллипса вдоль z , а точнее, только один из параметров $\beta(z)$. Тогда граница пучка

$$x_{\max}(z) = \sqrt{\varepsilon\beta(z)}.$$

Матрица (6.1) описывает координаты точки (x, x') при $z \neq 0$ в зависимости от начальных координат (x_0, x'_0) . Можно, обратив эту матрицу, выразить начальные координаты через конечные и подставить их в уравнение эллипса (5.7). Полученное уравнение будет описывать эллипс при $z \neq 0$. Коэффициент $\beta(z)$ при этом имеет вид

$$\beta(z) = \beta_0 + z^2/\beta_0, \tag{6.2}$$

т.е. в свободном пространстве $\beta(z)$ квадратично зависит от z . Граница пучка

$$x_{\max}(z) = \sqrt{x_0^2 + \frac{z^2\varepsilon^2}{x_0^2}}.$$

При больших z пучок расширяется практически линейно (рис. 6.1).

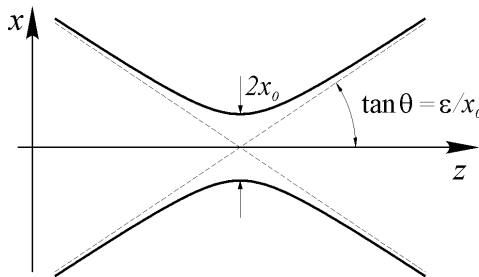


Рис. 6.1. Расширение пучка с конечным эмиттансом в свободном пространстве

Зная матрицу перехода в канале, динамику коэффициентов граничного эллипса легко рассчитать и для случая произвольных внешних линейных полей. Пусть матрица перехода из точки z_0 в точку z имеет вид

$$M(z_0 | z) = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix},$$

где $C(z)$ и $S(z)$ – косинусо- и синусообразные решения (см. параграф 4.2). Используя описанный выше подход, можно найти, что коэффициенты эллипса преобразуются по закону

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + C'S & -SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}_{z_0}. \quad (6.3)$$

Входящая в (6.3) матрица называется *матрицей Штеффена*.

6.2. Движение частицы в периодических полях Уравнение Хилла и функции Флоке

Как было показано выше, при движении в свободном пространстве пучок с ненулевым эмиттансом расширяется. Без внешних фокусирующих полей огибающая такого пучка рано или поздно достигнет стенок вакуумной камеры, и частицы пучка начнут оседать на них. Соответственно для предотвращения потерь такие поля необходимо сформировать в системах, где пучок проходит значительное расстояние, например, в циклических ускорителях (циклотронах, синхротронах), длинных линейных ускорителях, транспортных каналах и т.д.

Прямая задача расчета динамики пучка заключается в построении огибающих по заданным условиям на входе в канал и известным характеристикам канала. Важна также обратная задача: для заданного канала определить и обеспечить оптимальные (это понятие будет уточнено ниже) условия входа в него потока. В общем случае решение этих задач может быть выполнено либо путем перемножения матриц элементов канала, либо численно. Существует, однако, распространенный класс каналов, поведение потока в которых может быть установлено аналитически. Это периодические каналы, в которых фокусирующие силы изменяются периодически вдоль оси z с пространственным периодом S_0 , много мень-

шим длины канала. Оказывается, что будучи собраны в многочисленный коллектив, линзы обнаруживают свойства, которые отсутствуют у каждой из них в отдельности.

Пусть имеется длинный канал, составленный из аксиально-симметричных электростатических и магнитных линз, поля которых периодичны с пространственным периодом S_0 . Параксиальную траекторию частицы в таком канале, если рассматривать его как сложную линзу, можно получить с помощью уравнения (3.22), которое с учетом периодичности канала запишем в виде

$$\rho'' + \rho \left[\frac{3}{16} \left(\frac{U'_0(z)}{U_0(z)} \right)^2 + \frac{\eta B_0^2(z)}{2} \right] = \rho'' + \rho Q(z) = 0.$$

Это линейное уравнение второго порядка, не содержащее первой производной с периодическим коэффициентом $Q(z + S_0) = Q(z)$. Уравнение с такими свойствами называется *уравнением Хилла*.

Уравнение Хилла также возникает при исследовании динамики частиц в канале, составленном из периодически повторяющихся квадруполь и пустых промежутков. Примеры периодических структур квадрупольных каналов приведены на рис. 6.2. Траектория частицы в параксиальном приближении описывается двумя независимыми уравнениями (4.15):

$$x'' + \chi(z)x = 0, \quad y'' - \chi(z)y = 0, \quad \chi(z + S_0) = \chi(z).$$

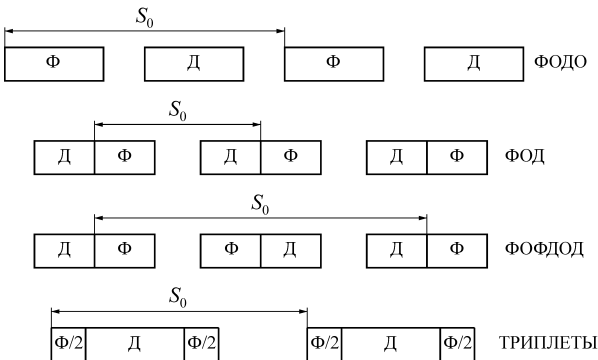


Рис. 6.2. Примеры расстановки квадруполь в периодическом канале

Каждое из этих уравнений является уравнением Хилла. В следующем параграфе это уравнение будет изучено подробно, а сейчас мы рассмотрим один пример, имеющий самостоятельное значение и позволяющий обнаружить особенности поведения заряженной частицы в периодической структуре.

Рассмотрим составленный из магнитных линз аксиально-симметричный канал с синусоидальным распределением индукции на оси $B_0(z) = B_m \cos(2\pi z/S_0)$. Используя уравнение (3.23), получаем

$$r'' + r \frac{\eta B_m^2}{8U_0} \cos^2\left(\frac{2\pi z}{S_0}\right) = r'' + r \frac{\eta B_m^2}{16U_0} \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi z}{S_0}\right)\right] = 0.$$

Это хорошо изученный частный случай уравнения Хилла – *уравнение Матье*, которое можно переписать в стандартной форме:

$$r'' + \left(\frac{2\pi}{S_0}\right)^2 \left[a + 2b \cos\left(\frac{4\pi z}{S_0}\right) \right] r = 0. \quad (6.4)$$

Уравнение Матье описывает осциллятор с периодически меняющимся параметром. Оказывается, что в зависимости от значения a и b амплитуда решения этого уравнения может неограниченно возрастать с ростом z при любых отличных от нуля начальных условиях (*неустойчивое решение*) или быть конечной (*устойчивое решение*). Из диаграммы устойчивости уравнения Матье (рис. 6.3) видно, что плоскость параметров a и b оказывается разбита на чередующиеся области устойчивых и неустойчивых областей, число которых бесконечно.

Движение осциллятора с периодически меняющимся параметром описывается двумя частотами: средней частотой колебаний системы $\omega_a = 2\pi\sqrt{a}/S_0$ и частотой изменения параметра $\omega_b = 4\pi/S_0$. Обращает на себя внимание тот факт, что все области неустойчивости начинаются в точках $a = n^2$, где n – целое число. Объясняется это тем, что именно тогда, когда средняя частота движения кратна половине частоты изменения параметра, в системе возбуждается параметрический резонанс:

$$\omega_a = \frac{n}{2} \omega_b \Rightarrow \frac{2\pi\sqrt{a}}{S_0} = \frac{n}{2} \frac{4\pi}{S_0} \Rightarrow a = n^2.$$

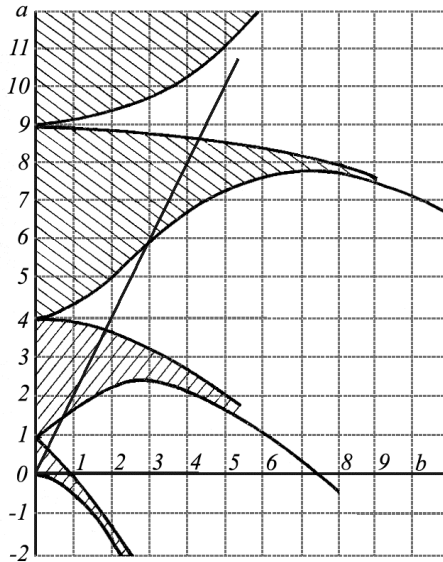


Рис. 6.3. Диаграмма устойчивых (заштрихованы) и неустойчивых областей уравнения Матье

Для канала с синусоидальным магнитным полем имеет место дополнительное условие

$$a = 2b = \frac{\eta B_m^2}{16U_0} \left(\frac{S_0}{2\pi} \right)^2,$$

которому на рис. 6.3 отвечает прямая линия. Если плавно увеличивать от нуля амплитуду индукции B_m , то система будет поочередно переходить из устойчивой области в неустойчивую, и наоборот. В неустойчивых зонах параметрический резонанс связывает две внутренние степени свободы системы и создает условия для эффективного обмена энергии между ними. В рассмотренном случае магнитного канала радиальная координата раскачивается за счет гораздо более сильного продольного движения.

Рассмотренный пример показывает, что в длинном канале, составленном из периодически повторяющихся линз, движение заряженных частиц может оказаться неустойчивым, даже если все эти линзы фоку-

сирующие. Понятно, что в случае неустойчивого движения пучок быстро погибнет на стенках вакуумной камеры. Поэтому исследование движения в периодических структурах, в том числе его устойчивости, является очень важной задачей.

Поскольку уравнение Хилла

$$x'' + Q(z)x = 0, \quad Q(z + S_0) = Q(z) \quad (6.5)$$

является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, любое его решение может быть представлено как линейная комбинация двух заранее выбранных действительных или комплексных линейно независимых решений, образующих фундаментальную пару (см. параграф 4.1). В принципе любые два линейно независимых решения годятся для образования такой пары, но далеко не каждая оказывается удобной в работе. В простом случае гармонического осциллятора $x'' + \omega^2 x = 0$ в качестве действительной фундаментальной пары используют обычно $\sin(\omega z)$, $\cos(\omega z)$, а для комплексной пары берут функцию $\cos(\omega z) + i\sin(\omega z)$ и ей комплексно-сопряженную. Можно показать, что любой другой выбор фундаментальной пары приводит к решению, где и амплитуда и фаза сложно зависят от z , распознать в нем простое гармоническое колебание нелегко.

Первый относящийся к уравнению (6.5) вопрос связан с выбором для него наиболее удобной фундаментальной пары. В качестве действительной фундаментальной пары выбираем решения $C(z)$, $S(z)$ с начальными условиями $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$, $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$. Поскольку (6.5) не содержит первой производной по x , определитель Вронского этой системы решений постоянен и равен единице.

В качестве фундаментальной пары можно также взять два комплексно-сопряженных решения $\xi(z) = \sigma(z)e^{i\nu(z)}$ и $\xi^*(z) = \sigma(z)e^{-i\nu(z)}$. С помощью комплексной пары общее решение (6.5) представим в виде

$$x(z) = C\xi(z) + C^*\xi^*(z) = A\sigma(z)\cos(\psi(z) + \theta),$$

где A , θ – произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Рассмотрим решение $x = \sigma e^{i\psi}$, найдем его первую и вторую производные:

$$x' = (\sigma' + i\sigma\psi')e^{i\psi}, \quad x'' = (\sigma'' + 2i\sigma'\psi' + i\sigma\psi'' - \sigma\psi'^2)e^{i\psi},$$

подставим их в уравнение (6.5) и выделим действительную часть

$$\sigma'' + Q(z)\sigma - \frac{1}{\sigma^3} = 0 \quad (6.6)$$

и мнимую

$$\sigma\psi'' + 2\psi'\sigma' = 0. \quad (6.7)$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\psi'(z) = \frac{1}{\sigma^2(z)}. \quad (6.8)$$

Видно, что фаза этого решения полностью определяется его модулем и главным оказывается модульное уравнение (6.6). Как находить начальные условия $\sigma(0)$, $\sigma'(0)$ и как решать это нелинейное уравнение, мы обсудим позже, а сейчас обратим внимание на тот факт, что при выводе (6.6) никак не использовалась периодичность коэффициента $Q(z + S_0) = Q(z)$. Между тем это важное обстоятельство должно помочь в поиске наиболее удобной фундаментальной пары.

С помощью введенных выше действительных функций $C(z)$, $S(z)$ образуем комплексные функции $\varphi_1(z) = AC(z) + BS(z)$ и $\varphi_2(z) = A^*C(z) + B^*S(z)$ и попробуем выбрать комплексные постоянные A и B так, чтобы выполнялось условие

$$\varphi_1(z + S_0) = \lambda_1\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z + S_0) = \lambda_2\varphi_2(z), \quad (6.9)$$

где λ_1, λ_2 – некоторые постоянные.

Уравнение Хилла (6.5) инвариантно относительно замены независимой переменной вида $z \rightarrow z + S_0$, и это качество должны наследовать решения. Иными словами, если $f(z)$ есть решение, то и $f(z + S_0)$ – тоже и (как

любое решение) есть линейная комбинация действительной фундаментальной пары. Применим это к функциям $C(z + S_0)$, $S(z + S_0)$:

$$C(z + S_0) = a_{11}C(z) + a_{21}S(z),$$

$$S(z + S_0) = a_{12}C(z) + a_{22}S(z).$$

Полагая $z = 0$, нетрудно проверить, что входящие в эти выражения коэффициенты есть элементы матрицы перехода из начала в конец периода:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = M(0 | S_0) = \begin{bmatrix} C(S_0) & S(S_0) \\ C'(S_0) & S'(S_0) \end{bmatrix}.$$

Используя эти разложения и учитывая (6.9), находим

$$\begin{aligned} \varphi(z + S_0) &= AC(z + S_0) + BS(z + S_0) = \\ &= (Aa_{11} + Ba_{12})C(z) + (Aa_{21} + Ba_{22})S(z) = A\lambda C(z) + B\lambda S(z). \end{aligned}$$

Собирая вместе члены при $C(z)$ и $S(z)$, получаем систему двух уравнений, корни которой есть искомые постоянные λ_1, λ_2 :

$$A(a_{11} - \lambda) + Ba_{12} = 0, \quad Aa_{21} + B(a_{22} - \lambda) = 0.$$

Условие разрешимости этой системы сводится к равенству нулю ее определителя, что приводит к уравнению

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + 1 = 0, \quad (6.10)$$

где учтено равенство единице определителя матрицы перехода на период.

Корни (6.10) по теореме Виета должны удовлетворять следующим равенствам: $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 =$ действительному числу. Следовательно, оба корня могут быть либо действительными, либо комплексно-сопряженными. Если ввести обозначение $a_{11} + a_{22} = 2 \cos \mu$, где μ — так называемый характеристический показатель уравнения Хилла, то

решение (6.10) можно представить в виде $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\mu}$. Таким образом, существует единственная пара линейно независимых решений уравнения Хилла, удовлетворяющая условиям $\varphi_1(z + S_0) = e^{i\mu} \varphi_1(z)$, $\varphi_2(z + S_0) = e^{-i\mu} \varphi_2(z)$. Это утверждение является *теоремой Флоке*, а сами функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ – *функциями Флоке*.

Функции Флоке оказываются той фундаментальной парой, с помощью которой наиболее просто выражаются решения уравнения Хилла и осуществляется анализ устойчивости движения. Действительно, после прохождения N периодов

$$x(z + NS_0) = C\varphi_1(z + NS_0) + C^*\varphi_2(z + NS_0) = C\lambda^N \varphi_1(z) + C^*\lambda^{-N} \varphi_2(z).$$

Видно, что если $|\lambda| \neq 1$, то при $N \rightarrow \infty$ это решение неограниченно растет и движение оказывается неустойчивой. Наоборот, если выполнено условие

$$-1 \leq \cos \mu = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{C(S_0) + S'(S_0)}{2} \leq 1,$$

то μ есть вещественное число, $|\lambda| = |e^{i\mu}| = 1$, и движение оказывается устойчивым. Внутри области устойчивости функции Флоке удобно представить в виде

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) = \rho(z)e^{i\Omega(z)}, \quad \varphi_2(z) = \varphi^*(z) = \rho(z)e^{-i\Omega(z)},$$

и общее решение записывается так:

$$x(z) = A\rho(z) \cos(\Omega(z) + \theta). \quad (6.11)$$

По теореме Флоке имеем

$$\begin{aligned} \rho(z + S_0)e^{i\Omega(z+S_0)} &= \rho(z)e^{i[\mu+\Omega(z)]}, \\ \rho(z + S_0) &= \rho(z), \quad \Omega(z + S_0) = \Omega(z) + \mu. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль функции Флоке есть функция периодическая с периодом структуры S_0 , а характеристический показатель μ – набег фазы колебаний на период. Уместно заметить, что $\rho(z + S_0) = \rho(z)$ –

единственное периодическое (с периодом S_0) решение модульного уравнения (6.6). Чтобы выделить это периодическое решение из остальной массы непериодических решений (6.6), мы и ввели для него специальное обозначение. В целом движение (6.11) является колебательным и характеризуется двумя периодами: амплитуда модулирована с периодом структуры S_0 , а период самого колебания равен $S_k = 2\pi S_0/\mu$.

Скорость изменения фазы $\Omega(z)$ определяется через модуль уравнением (6.7), что позволяет дать однозначное определение характеристического показателя

$$\mu = \int_0^{S_0} \frac{dz}{\rho^2(z)}.$$

В качестве примера найдем зоны устойчивости для простого канала с формулой периода ФД. Набеги фаз по x и y одинаковы и равны

$$\cos \mu_{x,y} = \frac{1}{2} \text{Tr}(M_+ M_-) = \cos K \cosh K,$$

где M_+ , M_- – матрицы (4.16), $K = \sqrt{\chi} S_0/2$, $\chi = qG/p$. Поведение $\cos \mu$ представлено на рис. 6.4, первым трем устойчивым зонам отвечают следующие интервалы K :

$$0 < K \leq 1,875, \quad 4,694 \leq K \leq 4,73, \quad 7,853 \leq K \leq 7,855.$$

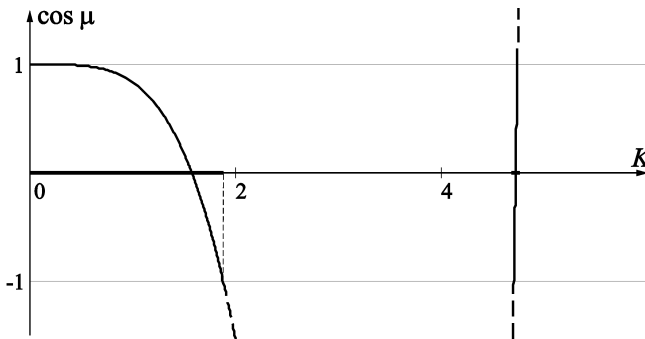


Рис. 6.4. Первые две зоны устойчивости для канала ФД

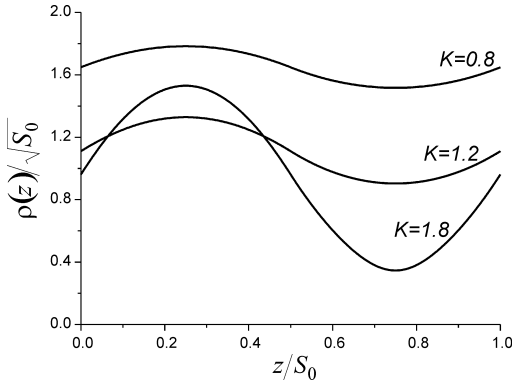


Рис. 6.5. Модуль функции Флоке для канала ФД

Эти цифры показывают, что размеры устойчивых областей весьма быстро уменьшаются, поэтому на практике возможно использовать только первую из них.

Качественно рассмотрим, как модуль функции Флоке зависит от градиента поля в квадрупольях в периодическом ФД-канале. При небольших значениях градиента, когда K мало, а $\cos \mu \approx 1$, значение $\rho(z)$ велико, а его модуляция мала. При возрастании градиента (и соответственно K) среднее значение $\rho(z)$ уменьшается, но его модуляция (и соответственно модуляция колебаний частиц) возрастают (рис. 6.5). При дальнейшем увеличении градиента, когда K приближается к правой границе первой зоны устойчивости, модуляция $\rho(z)$ становится очень значительной. Из рис. 6.5 видно, что существует оптимальное значение градиента, при котором максимальное значение $\rho(z)$ является наименьшим. Как будет показано ниже, пучок при этом имеет наименьший размер. Подобная зависимость $\rho(z)$ от градиентов квадрупольных линз характерна и для более сложных каналов.

6.3. Построение огибающей пучка в канале

При движении частиц в канале наибольший интерес представляет расчет огибающих пучка. Здесь возникают две задачи:

1) по заданным на входе в канал размеру и углу огибающей построить огибающую в канале;

2) для данного канала найти размер и угол огибающей на входе, обеспечивающие оптимальное прохождение потоком канала.

Ниже мы рассмотрим обе эти задачи в терминах x -движения (y -движение и аксиально-симметричный случай исследуются аналогично с очевидной заменой обозначений).

Как было показано выше, траектория частицы может быть записана через модуль и фазу фундаментальной пары решений уравнения (6.5) в виде

$$x(z) = A_x \sigma(z) \cos(\psi(z) + \theta),$$

$$x'(z) = A_x \sigma'(z) \cos(\psi(z) + \theta) - \frac{A_x}{\sigma(z)} \sin(\psi(z) + \theta).$$

Здесь учтено равенство (6.8). Исключим из уравнений траектории зависимость от θ и получим выражение для интеграла движения A_x :

$$A_x^2 = \left[\sigma'^2(z) + \frac{1}{\sigma^2(z)} \right] x^2(z) - 2\sigma(z)\sigma'(z)x(z)x'(z) + \sigma^2(z)x'^2(z), \quad (6.12)$$

которое является уравнением эллипса. Это означает, что все частицы с одним и тем же значением интеграла A_x располагаются на эллипсе (его удобно назвать фазовым эллипсом) независимо от величины входной фазы θ . По мере продвижения частиц по каналу этот эллипс изменяет форму, но остается эллипсом. Действительно, из линейности уравнения Хилла следует линейность преобразования $(x(0), x'(0)) \rightarrow (x(z), x'(z))$, при этом эллипс переходит в эллипс. Частицы, имеющие $\tilde{A}_x < A_x$, все время остаются внутри рассмотренного эллипса.

Пусть на вход в канал ($z = 0$) подается поток частиц, представление которого на фазовой плоскости xx' есть заполненный эллипс (см. рис. 5.4), граница которого определяется уравнением

$$\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2 = \varepsilon_x. \quad (6.13)$$

Выберем теперь входящее в уравнение фазового эллипса (6.12) комплексное решение $\xi(z) = \sigma(z)e^{i\psi(z)}$ так, чтобы на входе в канал граница потока (6.13) и фазовый эллипс совпали:

$$\sigma(0) = \sqrt{\beta_x}, \quad \sigma'(0) = -\frac{\alpha_x}{\sqrt{\beta_x}}, \quad A_x^2 = \varepsilon_x. \quad (6.14)$$

Так как всем частицам, лежащим на границе фазового объема потока и границе фазового эллипса канала, соответствует одно и то же значение интеграла A_x , они будут совпадать не только на входе, но и всюду в канале.

Поскольку траектория частицы имеет вид $x(z) = A_x\sigma(z)\cos(\psi(z) + \theta)$, при любом значении z максимально удалены от оси потока те частицы, для которых $\cos(\psi(z) + \theta) = 1$. Это значит, что огибающая потока имеет вид

$$r_x(z) = \sqrt{\varepsilon_x}\sigma(z), \quad (6.15)$$

где $\sigma(z)$ есть решение модульного уравнения (6.6) с начальными условиями (6.14). Используя (6.6) и (6.15), напишем уравнения для огибающей потока:

$$r_x'' + Q(z)r_x - \frac{\varepsilon_x^2}{r_x^3} = 0, \quad (6.16)$$

$$r_x(0) = \sqrt{\varepsilon_x\beta_x}, \quad r_x'(0) = -\alpha_x\sqrt{\frac{\varepsilon_x}{\beta_x}}.$$

Подчеркнем, что наличие конечного эмиттansa приводит к тому, что уравнение для огибающей (6.16) не совпадает с уравнением для траектории какой-либо частицы (6.5). В этом случае гипотеза о том, что стартовавшая крайней частица остается крайней всюду в канале, не верна.

Уравнение (6.16) вместе с соответствующими начальными условиями дают решение задачи о построении огибающей потока с ненулевым эмиттансом в канале по заданным условиям на его входе. Заметим, что при его выводе мы нигде не использовали условие периодичности полей в канале, таким образом его можно использовать для исследования динамики потоков в произвольных каналах.

6.4. Эффективный эмиттанс

Рассмотрим задачу об оптимальном прохождении канала потоком. Обычно известен максимальный отведенный под поток поперечный размер (апертура) канала $2a_0$. Из (6.15) следует, что $r_{x,\max} = \sqrt{\varepsilon_x} \sigma_{\max}$ и отсюда максимальный пропускаемый данным каналом эмиттанс при заданных условиях на входе:

$$\varepsilon_{x,\max} = \left(\frac{a_0}{\sigma_{\max}} \right)^2.$$

Эта величина очень сильно зависит от формы представления пучка на фазовой плоскости на входе в канал. Располагая перед каналом специальную систему согласования, можно минимизировать σ_{\max} , тем самым приготовив поток к наилучшему прохождению канала.

Для длинного периодического канала возможно аналитическое решение проблемы согласования. В таком канале из всех возможных профилей огибающих наименьший максимум обеспечивает модуль функции Флоке $\rho_{\max} < \sigma_{\max}$. Это значит, что если на входе в канал граница фазового эллипса ориентирована так, что выполняются условия $\sigma(0) = \rho(0)$, $\sigma'(0) = \rho'(0)$, то эмиттанс пропускаемого потока максимален и равен акцептансу канала. Для реализации такого потока надо, чтобы в уравнении границы эллипса (6.13) на входе имели место равенства

$$\gamma_x = \rho'^2(0) + \frac{1}{\rho^2(0)}, \quad \alpha_x = -\rho(0)\rho'(0), \quad \beta_x = \rho^2(0). \quad (6.17)$$

Ориентированный по этим коэффициентам эллипс называется *эллипсом Флоке канала*, а поток – *согласованным*. Огибающие согласованного потока, в силу свойств функции Флоке, оказываются периодическими с периодом структуры S_0 .

Предварительная подготовка потока ко входу в канал – согласование – выгодно в двух отношениях. С его помощью можно либо при заданном размере канала провести поток с максимальным эмиттансом, либо обеспечить минимальный размер канала для потока с заданным эмиттансом. Поскольку преобразованию подлежат четыре параметра – $r_x(0)$, $r'_x(0)$, $r_y(0)$, $r'_y(0)$, минимальное число квадрупольных линз в согласующей цепочке равно четырем.

Рассмотрим, что происходит в случае неполноценного согласования потока с каналом. Пусть пучок на входе в канал представляется линией на фазовой плоскости. Впишем эту линию в эллипс Флоке канала (рис. 6.6, а, фазовый портрет на входе – линия 1). Рассмотрим ситуацию через один период структуры. Поскольку модуль функции Флоке – функция периодическая, то форма эллипса не изменится, но составляющие эллипс точки сдвинутся вдоль него, в том числе и крайняя точка линии. Таким образом, фазовый портрет пучка через период преобразуется из линии 1 в линию 2 (рис. 6.6, а), еще через период – в линию 3 и т.д. Подобным образом будет вращаться внутри описанного эллипса Флоке любой фазовый портрет несогласованного пучка (например, эллипс – см. рис. 6.6, б), заметая всю его площадь по мере продвижения вдоль канала. Максимальный размер огибающей пучка в длинном канале будет таким же, как и размер согласованного пучка с эмиттансом, соответствующим площади описанного эллипса Флоке. Этот эмиттанс называют *эффективным эмиттансом*, он может весьма сильно превышать реальный эмиттанс пучка, что подтверждает важность проблемы согласования.

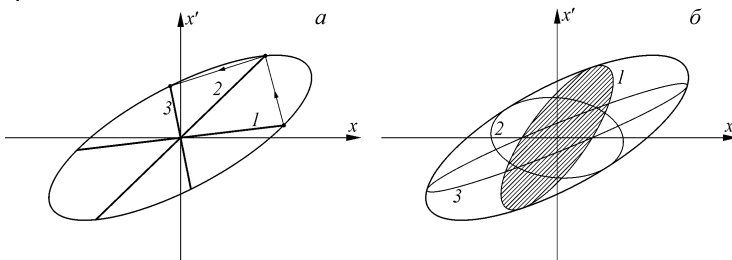


Рис. 6.6. Увеличение эффективного эмиттанса вследствие несогласованности потока с каналом:

1 – фазовый портрет пучка на входе в канал; 2 – через один период структуры; 3 – еще через период

Другой источник превышения эффективного эмиттанса несогласованного пучка над реальным – действие нелинейных сил. Пусть на вход в длинный канал подается пучок, представляющий на фазовой плоскости несогласованный с каналом эллипс (рис. 6.7, а). По мере прохождения пучка вдоль идеально линейного канала его фазовый портрет будет вращаться внутри описанного эллипса Флоке, сохраняя эллиптическую форму. Если же поля в канале нелинейны,

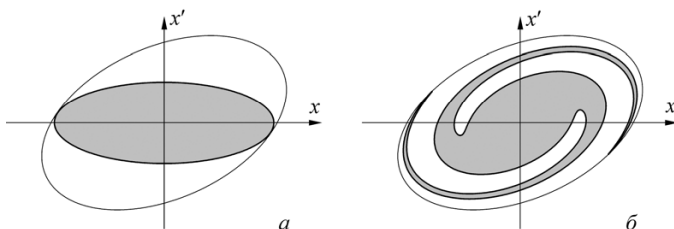


Рис. 6.7. Увеличение эффективного эмиттанта вследствие действия нелинейных сил

то их фокусирующее действие и, следовательно, набег фазы будут зависеть от амплитуды колебаний. Различные участки эллипса при этом будут вращаться с различной скоростью и эмиттанс приобретет форму, похожую на кляксу (рис. 6.7, б). При длительном действии нелинейных сил фазовый портрет пучка (сохраняя свою площадь) станет похож на клубок ниток, заполняющий весь описанный эллипс Флоке. С практической точки зрения этот процесс необратим и эквивалентен возрастанию эмиттанта. Подобный эффект в большей или меньшей степени характерен для всех кольцевых ускорителей.

6.5. Параметры Твисса

В предыдущем разделе мы могли наблюдать, как уходило на задний план понятие траектории отдельной частицы, а вместо этого появлялись понятия огибающей потока и динамики представления пучка на фазовой плоскости. Оказалось, что в длинном периодическом канале нам достаточно знать поведение трех коэффициентов $\gamma(z)$, $\alpha(z)$, $\beta(z)$ эллипса Флоке, чтобы получить подробную информацию о форме потока. Напомним, что эти коэффициенты связаны с модулем функции Флоке соотношениями (6.17) и в ускорительной физике они получили название *параметров (коэффициентов) Твисса*. С их помощью можно выразить матрицу перехода на один период в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 M(z | z + S_0) &= I \cos \mu + J \sin \mu = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{bmatrix}, \quad (6.18)
 \end{aligned}$$

где I – единичная матрица, J – матрица с нулевым следом, составленная из параметров Твисса:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{Tr}(J) = 0, \quad J^2 = -I.$$

Такое представление матрицы перехода называется *параметризацией Твисса*.

Если движение частиц в системе описывается уравнением Хилла (6.5), то параметры Твисса связаны между собой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \beta' &= -2\alpha, \\ \alpha' &= Q(z)\beta - \gamma, \\ \gamma' &= 2Q(z)\alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение потока в периодическом канале, составленном из тонких фокусирующих линз с фокусным расстоянием f , расстояние между линзами S_0 . Матрица перехода на один период в таком канале

$$M = \begin{bmatrix} 1 & S_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - S_0/f & S_0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}.$$

Движение в канале устойчиво, если

$$|\cos \mu| = \left| \frac{1}{2} \text{Tr}(M) \right| = \left| \frac{1}{2} \left(2 - \frac{S_0}{f} \right) \right| < 1 \Rightarrow f > \frac{S_0}{4}.$$

Из (6.18) можно выразить параметр Твисса $\beta(z)$ через коэффициент $m_{12}(z)$ матрицы перехода из точки z на один период вперед:

$$\beta(z) = \frac{m_{12}(z)}{\sin \mu}, \quad \sin \mu = \sqrt{1 - \cos^2 \mu} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{S_0}{2f} \right)^2},$$

$$M(z | z + S_0) = \begin{bmatrix} 1 & S_0 - z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{12}(z) = S_0 - \frac{S_0^2}{4f} + \frac{(z - S_0/2)^2}{f}.$$

График $\beta(z)$ представлен на рис. 6.8. Видно, что максимумы $\beta(z)$ находятся в местах расположения фокусирующих линз, что существует оптимальное фокусное расстояние f , которое минимизирует β_{\max} и, соответственно, максимальный размер пучка в канале.

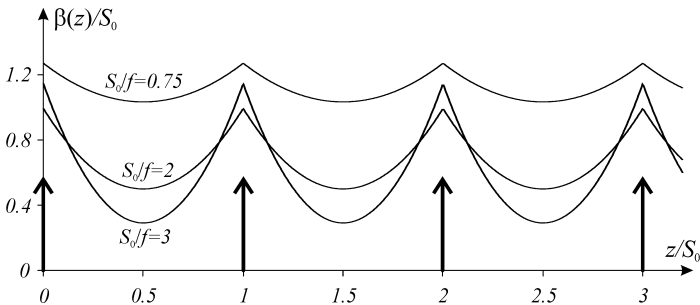


Рис. 6.8. График параметра Твисса $\beta(z)$ в ФО-канале, составленном из тонких линз, в зависимости от их фокусного расстояния

Задания

6.1. На расстоянии z_0 от кроссовера пучка с эмиттансом $\varepsilon \neq 0$ расположена фокусирующая линза. Найти такое ее фокусное расстояние, чтобы огибающая пучка сразу после линзы была параллельна оси z . В кроссовере пучок имеет размер $2x_0$, на фазовой плоскости он образует эллипс.

6.2. В кроссовер пучка с эмиттансом $\varepsilon \neq 0$ и размером $2x_0$ помещена фокусирующая линза. Найти, при каком фокусном расстоянии линзы кроссовер будет находиться на наибольшем от нее расстоянии. На фазовой плоскости пучок образует эллипс.

6.3. На расстоянии L друг от друга находятся две параллельные щелевые диафрагмы. Ширина щелей $2a$. Найти акцептанс этой системы. Сравнить с максимальным эмиттансом пучка, который может пройти эту систему без потерь и на фазовой плоскости образует эллипс.

6.4. Доказать соотношение (6.3).

6.5. Получить из (6.3) коэффициент $\beta(z)$ в свободном пространстве (6.2).

6.6. Доказать, что определитель Вронского, составленный из двух комплексно-сопряженных решений уравнения Хилла, равен $-2i$.

6.7. Показать, что матрицы перехода на один период из точек z_1 и z_2 связаны между собой матрицей перехода из z_1 в z_2 :

$$M(z_2 | z_2 + S_0) = M(z_1 | z_2) M(z_1 | z_1 + S_0) M^{-1}(z_1 | z_2).$$

6.8. Показать, что след матрицы перехода на один период $M(z | z + S_0)$ не зависит от z .

6.9. Показать, что μ в параметризации Твисса не зависит от z .

6.10. Даны периодические каналы с апертурой $2a$:

а) канал, состоящий из тонких фокусирующих линз с фокусным расстоянием f , расстояние между линзами S_0 ;

б) канал, состоящий из последовательности тонких фокусирующих и дефокусирующих линз с фокусным расстоянием f , расстояние между линзами S_0 ;

в) канал, состоящий из последовательности дуплетов тонких линз (фокусирующая и дефокусирующая линзы с фокусным расстоянием f , расстояние между ними d), расстояние между дуплетами L . Известно, что $d \ll L$, $d \ll f$.

Для каждого канала определить оптимальное фокусное расстояние линз, при котором аксептанс канала является максимальным. Рассчитать соответствующую величину сдвига фазы μ на период. Рассчитать максимальный аксептанс. Для вариантов а и б определить величину пульсаций огибающей пучка $(r_{\max} - r_{\min})/r_{\max}$ при оптимальном f .

6.11. В системе с постоянным продольным магнитным полем $B(z) = B_0$ без электрического поля $U(z) = \text{const} = U_0$ движется пучок заряженных частиц, рожденных на экранированном катоде ($C_\alpha = 0$). Показать, что если этот пучок представляется на плоскости rr' эллипсом площадью πe , то возможно движение пучка с постоянным радиусом $r(z) = r_0$. Найти этот радиус.

7. ПОТОКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ

7.1. Основные соотношения. Первеанс

Рассматривая в предыдущих разделах движение заряженных частиц, мы не принимали во внимание их взаимодействие друг с другом. Это допустимо, если плотность пространственного заряда в любой точке потока достаточно мала. Однако саму оценку этой малости можно получить лишь в рамках более общей теории, где взаимодействие частиц учитывается.

Изучение динамики одной частицы позволило найти траекторию ее движения, определить параметры линз и ответить на вопрос об устойчивости движения частицы в канале. Учет конечной величины фазового объема пучка как меры неупорядоченного разброса поперечных скоростей частиц дал возможность рассмотреть поведение огибающих, определить максимальный размер пучка и найти оптимальные условия входа в канал.

Дальнейшее принципиальное уточнение теории связано с учетом кулоновских сил взаимодействия частиц потока. Такое уточнение необходимо, в частности, для решения практически важных задач о расплывании потоков и предельных токах в различных устройствах. Это кулоновское взаимодействие можно описать при помощи *собственных полей* пучка – электрического и магнитного. Собственное электрическое поле определяется распределением пространственного заряда пучка, а магнитное – распределением плотности тока. В то же время эти распределения зависят от сил, внешних и внутренних, действующих на частицы. Получается замкнутая цепь – распределение частиц зависит от действующих на них сил, а эти силы зависят от распределения частиц. Таким образом, задача расчета динамики интенсивного пучка является *самосогласованной*.

Обычный подход при численном решении самосогласованной задачи состоит в том, что пучок представляется набором конечного числа макрочастиц. Макрочастицы описывают фактическое распределение частиц в пучке и, таким образом, моделируют эффекты взаимодействия. Далее применяется метод последовательных приближений. Делается предположение о начальном распределении заряда потока, рассчитываются поля и вычисляются траектории макрочастиц. По результатам траекторного анализа распределение уточняется, и процесс продолжается до тех пор, пока не станет самосогласованным: принятое распределение заряда подтверждается расчетом.

Взаимодействие заряженных частиц в пучке можно разделить на «столкновительное» и «усредненное». Столкновительная часть полного взаимодействия возникает, когда частица взаимодействует со своими ближайшими соседями и, таким образом, на нее оказывает влияние их местоположение. Столкновения приводят к малым случайным отклонениям траектории частицы и статистическим флуктуациям распределения частиц в пучке. В большинстве систем этот эффект относительно мал, значимым исключением является внутрипучковое рассеяние в кольцевых ускорителях-накопителях. Далее мы не будем рассматривать столкновительное взаимодействие и примем, что на каждую частицу действует только усредненное коллективное поле всего множества частиц пучка. В этом случае собственные поля пучка можно рассматривать на том же основании, что и внешние. Соответственно, в отсутствие столкновений остается справедливой теорема Лиувилля, а электростатический потенциал подчиняется уравнению Пуассона, в правую часть которого входит усредненная плотность заряда.

Наличие пространственного заряда в потоке вызывает следующие основные эффекты:

- 1) расширение движущихся в свободном от внешних полей пространстве потоков заряженных частиц вследствие действия кулоновских сил отталкивания;
- 2) изменение потенциала пространства, вызванное присутствием в нем объемного заряда;
- 3) ограничение предельных токов в приборах, обусловленное образованием так называемых виртуальных катодов.

Рассмотрим стационарный поток заряженных частиц, распространяющийся в некоторой системе, содержащей эмиттер с нулевым

потенциалом. В нерелятивистском приближении движение описывается системой уравнений

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m_0} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}.$$

Не меняя сорта частиц и сохраняя подобие, изменим потенциалы всех электродов в λ_U раз и все размеры в λ_L раз. Первым будем считать состояние до изменения и вторым – после него. Если частицы покидают эмиттер с нулевыми скоростями, то из анализа размерностей возможно выразить вторые величины через первые:

$$\mathbf{E}_2 = \lambda_U \lambda_L^{-1} \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{v}_2 = \lambda_U^{1/2} \mathbf{v}_1, \quad \rho_2 = \lambda_U \lambda_L^{-2} \rho_1, \quad \mathbf{j}_2 = \lambda_U^{3/2} \lambda_L^{-2} \mathbf{j}_1.$$

Вычисляя интеграл от плотностей тока по поперечному сечению потоков в сходственных точках, переходим к полным токам обоих состояний $I_2 = \lambda_U^{3/2} I_1$. Учитывая, что $\lambda_U = U_2/U_1$, получаем

$$P = \frac{I_1}{U_1^{3/2}} = \frac{I_2}{U_2^{3/2}} = \text{const}.$$

Выраженная этим соотношением величина имеет размерность $\left[\text{A}/\text{B}^{3/2} \right]$ и называется *первеансом*. Первеанс не зависит от потенциалов на электродах и определяется только геометрией системы. Первеанс является мерой интенсивности потока – в дальнейшем мы увидим, что многие эффекты, связанные с влиянием пространственного заряда нерелятивистского потока, определяются его развеансом.

Поскольку развеанс – очень малая величина, чаще используется *микрореванс* $P_\mu = P \cdot 10^6$. Пушки телевизоров, например, имеют микрореванс порядка нескольких сотых, и эффектами пространственного заряда в них можно пренебречь. Микрореванс рекордных по интенсивности источников электронов достигает нескольких единиц. Первеанс зависит от заряда и массы частицы, если источник частиц q_1 , m_1 с развеансом P_1 перевести на работу с частицами q_2 , m_2 , то развеанс изменится: $P_2 = (m_1/m_2)^{1/2} (q_2/q_1) P_1$.

Заметим, что к интенсивным потокам термин «фокусировка» применять избегают и говорят об их формировании.

7.2. Действие сил пространственного заряда

Рассмотрим распространяющийся в свободном пространстве вдоль оси z длинный сгусток заряженных частиц эллиптического сечения с полуосями r_x , r_y и током I (рис. 7.1). Введем ряд упрощающих предположений, допустимость которых предстоит проверить после решения задачи.

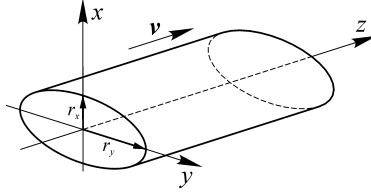


Рис. 7.1. Сгусток релятивистских частиц, распространяющийся вдоль оси z

Пусть скорости всех частиц одинаковы и направлены вдоль z , а плотность тока и плотность заряда распределены равномерно по сечению пучка. Введем движущуюся вместе с частицами вдоль оси z и неподвижную относительно центра тяжести сгустка систему координат x_c, y_c, z_c – так называемую c -систему. В этой системе наблюдатель увидит чисто электростатическое поле с потенциалом $U_c(x_c, y_c, z_c)$ и векторным магнитным потенциалом $\mathbf{A}_c \equiv 0$. Измеренные им значения в c -системе мы пересчитаем в лабораторные величины, которые будем снабжать индексами k (кулоновский).

По формулам релятивистских преобразований между физическими величинами обеих систем имеются следующие общие соотношения:

$$\rho_k = \gamma \rho_c, \quad U_k = \gamma (U_c + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_{c\parallel}), \quad \mathbf{A}_{k\perp} = \mathbf{A}_{c\perp},$$

$$\mathbf{A}_{k\parallel} = \gamma \left(\mathbf{A}_{c\parallel} + \frac{\beta_{\parallel}}{c} U_c \right),$$

$$\mathbf{E}_{k\parallel} = \mathbf{E}_{c\parallel}, \quad \mathbf{E}_{k\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{c\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{c\perp}),$$

$$\mathbf{B}_{k\parallel} = \mathbf{B}_{c\parallel}, \quad \mathbf{B}_{k\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{c\perp} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{c\perp} \right).$$

К этому списку надо добавить преобразование координат

$$\delta x = \delta x_c, \quad \delta y = \delta y_c, \quad \delta z = \delta z_c / \gamma.$$

Учитывая, что $\mathbf{A}_c \equiv 0$, находим

$$U_k = \gamma U_c, \quad A_{kx} = A_{ky} = 0, \quad A_{kz} = \frac{\gamma \beta}{c} U_c = \frac{\beta}{c} U_k.$$

Отсюда определяем собственные поля сгустка:

$$E_{kx} = -\gamma \frac{\partial U_c}{\partial x_c} = -\frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad E_{ky} = -\gamma \frac{\partial U_c}{\partial y_c} = -\frac{\partial U_k}{\partial y},$$

$$E_{kz} = -\frac{\partial U_c}{\partial z_c} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial U_k}{\partial z},$$

$$B_{kx} = \frac{\partial A_{kz}}{\partial y} = \frac{\beta}{c} \frac{\partial U_k}{\partial y}, \quad B_{ky} = -\frac{\partial A_{kz}}{\partial x} = -\frac{\beta}{c} \frac{\partial U_k}{\partial x}, \quad B_{kz} = 0.$$

Теперь мы в состоянии вычислить силу Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_k + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_k)$ в лабораторной системе координат:

$$F_{kx} = q \left(-\frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{v\beta}{c} \frac{\partial U_k}{\partial x} \right) = -q \frac{\partial U_k}{\partial x} (1 - \beta^2) = -\frac{q}{\gamma^2} \frac{\partial U_k}{\partial x},$$

$$F_{ky} = -q \frac{\partial U_k}{\partial y} (1 - \beta^2) = -\frac{q}{\gamma^2} \frac{\partial U_k}{\partial y},$$

$$F_{kz} = -\frac{q}{\gamma^2} \frac{\partial U_k}{\partial z}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_k = -\frac{q}{\gamma^2} \nabla U_k.$$

По сравнению со случаем электростатики сила кулоновского расталкивания ослабляется в γ^2 раз. Это происходит от взаимодействия движущихся зарядов с ими же созданным магнитным полем. Возникающая при этом сила препятствует кулоновскому расталкиванию и называется силой магнитного самостягивания пучка.

Для вычисления внутреннего потенциала сгустка вновь обратимся к c -системе, где возникает чисто статическая задача отыскания потенциала равномерно заряженного цилиндра эллиптического сечения. Вот ее решение:

$$U_c(x_c, y_c) = -\frac{\rho_c}{4\epsilon_0} \left[x_c^2 + y_c^2 - \frac{r_{xc} - r_{yc}}{r_{xc} + r_{yc}} (x_c^2 - y_c^2) \right] + \text{const}.$$

Возвращаясь в лабораторную систему, находим

$$U_k(x, y) = \gamma U_c = -\frac{\rho_k}{4\epsilon_0} \left[x^2 + y^2 - \frac{r_x - r_y}{r_x + r_y} (x^2 - y^2) \right] + \text{const}.$$

На самом деле полуоси эллипса r_x, r_y медленно меняются. Считая, что это изменение происходит на длинах, много больших самих полуосей, и выражая плотность заряда через ток, получаем окончательно

$$U_k(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi\epsilon_0 v r_x(z) r_y(z)} \times \left[x^2 + y^2 - \frac{r_x(z) - r_y(z)}{r_x(z) + r_y(z)} (x^2 - y^2) \right] + \text{const}. \quad (7.1)$$

Добавим этот потенциал в лагранжиан (2.6), что позволит нам решать стационарные задачи с учетом сил пространственного заряда:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} + q \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - q U(\mathbf{r}) - \frac{q}{\gamma^2} U_k(\mathbf{r}). \quad (7.2)$$

7.3. Расплывание потоков под действием сил пространственного заряда

В качестве первой такой задачи рассмотрим расплывание потока кругового сечения в свободном от внешних полей пространстве. Примем, что поток не меняет потенциала пространства U_0 , его фазовый объем равен нулю и потому огибающая пучка всегда совпадает с тра-

екторией крайней частицы. Для круглого пучка электронов лагранжиан (7.2) имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + eU_0 + \frac{eI r^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 v r_b^2},$$

где r_b – огибающая пучка. Ограничиваясь параксиальным приближением $v \approx v_z$ и переходя к z как к независимой переменной, находим уравнение для граничной частицы r_b :

$$r_b'' = \frac{1}{m_0 \gamma^3} \frac{eI}{2\pi\epsilon_0 v^3} \frac{1}{r_b} = \frac{2\tilde{I}}{[\tilde{U}_0(2 + \tilde{U}_0)]^{3/2}} \frac{1}{r_b} \approx \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}} \frac{1}{r_b}. \quad (7.3)$$

Здесь использованы нормированные величины потенциала, тока и перванса:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U/U_E, \quad \tilde{I} = I/I_E, \quad \tilde{P} = P/P_E, \\ I_E &= 4\pi\epsilon_0 m_0 c^3 / |q|, \quad P_E = I_E / U_E^{3/2}, \end{aligned}$$

где U_E определено по формуле (2.13). Для электронов $I_E = 1,7 \cdot 10^4$ А, $P_E = 46,6 \cdot 10^{-6}$ А/В^{3/2}. Последнее выражение в (7.3) получено в нерелятивистском приближении.

Обозначим через r_0 начальное значение огибающей потока (рис. 7.2) и введем новые независимую $\xi = z(\sqrt{2\tilde{P}})^{1/2} / r_0$ и зависимую $R = r/r_0$ переменные.

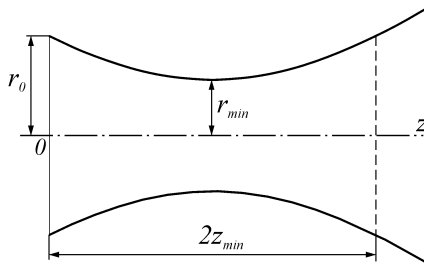


Рис. 7.2. Огибающая сходящегося интенсивного потока в свободном пространстве

Уравнение (7.3) и начальные условия примут вид

$$R'' - \frac{1}{2R} = 0, \quad R_0 = 1, \quad \left. \frac{dR}{d\xi} \right|_0 = R'_0,$$

где штрихом обозначена производная по ξ . Умножая это уравнение на R' и интегрируя, находим

$$\ln R = R'^2 - R_0'^2, \quad R = e^{-R_0'^2} e^{R'^2} = R_{\min} e^{R'^2},$$

где $R_{\min} = \exp(-R_0'^2)$ – минимальный размер потока в кроссовере, при котором $R' = 0$. Обозначим $u = R'$ и продифференцируем равенство

$$R = e^{-R_0'^2} e^{u^2} \rightarrow u = 2ue^{-R_0'^2} e^{u^2} \frac{du}{d\xi}.$$

Интегрирование последнего выражения дает окончательный результат:

$$\xi = 2e^{-R_0'^2} \int_{R_0'}^{\pm \sqrt{\ln R + R_0'^2}} e^{u^2} du,$$

где знак верхнего предела совпадает со знаком R' , т.е. пока поток сходится, берется знак «минус».

На рис. 7.3 приведены зависимости $R(\xi)$ для различных значений $R'_0 < 0$. При $R'_0 = -0,92$ кроссовер удален от входа $\xi = 0$ на максимальное

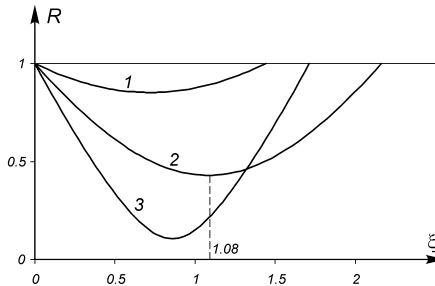


Рис. 7.3. Положение кроссовера при различных значениях начального наклона потока:

$R'_0 = -0,4; -0,92; -1,5$ (кривые 1–3 соответственно)

расстояние, равное $\xi_{cr,max} = 1,08$. С помощью этих величин можно решить следующую задачу: дан отрезок трубы диаметром D и длиной L (рис. 7.4), необходимо найти максимальный ток, который можно пропустить через эту трубу, и указать условия для его реализации (типичная задача согласования).

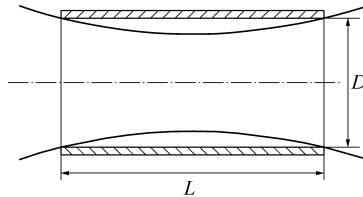


Рис. 7.4. Определение максимального тока через отрезок трубы

Максимальный ток – это ток, при котором величине $z = L/2$ отвечает максимальное значение $\xi_{cr,max} = 1,08$ и выполняется условие на входе $R'_0 = -0,92$ при $r_0 = D/2$. Отсюда равенство

$$\xi_{cr,max} = \frac{L}{2} \frac{2}{D} \left(\frac{\sqrt{2} \tilde{I}_{max}}{\tilde{U}_0^{3/2}} \right)^{1/2},$$

раскрывая которое, находим

$$\tilde{I}_{max} = 0,827 \left(\frac{D}{L} \right)^2 \tilde{U}_0^{3/2} \Rightarrow P_{max} = 38,5 \cdot 10^{-6} \left(\frac{D}{L} \right)^2,$$

где второе выражение написано для электронов.

Приведенные выше рассуждения сделаны при условии, что пучок имеет нулевой эмиттанс. Мы уже знаем, что наличие конечного эмиттанса также приводит к распыливанию потока. В общем случае расчет динамики интенсивного пучка с конечным эмиттансом – довольно сложная задача, решаемая преимущественно численными методами. Существует, однако, простое, но эффективное приближение динамики пучка во внешних линейных полях – модель Катчинского–Владимирского. В ней предполагается, что пучок имеет на фазовой плоскости «микрочаноническое» распределение (5.8) (см. параграф 5.3), следовательно, его поперечное

сечение есть эллипс с равномерным распределением плотности объемного заряда. Собственные поля такого пучка

$$E_x = -\frac{\partial U_k}{\partial x} \sim x, \quad E_y = -\frac{\partial U_k}{\partial y} \sim y,$$

где потенциал пучка U_k определяется выражением (7.1). Таким образом, при распределении Капчинского–Владимирского поперечные компоненты собственного поля пучка линейны и не зависят друг от друга. Если компоненты внешних полей также обладают этим свойством, то в параксиальном приближении динамика частиц пучка является линейной, соответственно сохраняются вид распределения (5.8) и эллиптическая форма поперечного сечения пучка. Уравнения, описывающие изменение размеров пучка по осям x и y , можно получить из выражения (6.16), добавив к нему силу кулоновского расталкивания на границе пучка:

$$r_x'' + Q_x(z)r_x - \frac{\varepsilon_x^2}{r_x^3} - \frac{\tilde{I}}{(\beta\gamma)^3} \frac{4}{r_x + r_y} = 0,$$

$$r_y'' + Q_y(z)r_y - \frac{\varepsilon_y^2}{r_y^3} - \frac{\tilde{I}}{(\beta\gamma)^3} \frac{4}{r_x + r_y} = 0.$$

Для нахождения распыливания круглого нерелятивистского потока в модели Капчинского–Владимирского нужно убрать фокусировку $Q(z) = 0$ и сделать одинаковыми эмиттансы и размеры $r_x = r_y \equiv r_b$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y \equiv \varepsilon_r$. Тогда в переменных r, z и преобразованных переменных R, ξ оба расталкивающих эффекта описываются уравнениями

$$r_b'' = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}r_b} + \frac{\varepsilon_r^2}{r_b^3}, \quad R'' = \frac{1}{2R} + \frac{K_V}{R^3},$$

где введен дополнительный коэффициент фазового объема $K_V = \varepsilon_r^2 / (r_0^2 \sqrt{2\tilde{P}})$. Удобно за начало отсчета брать положение кроссовера, зависимость $R(\xi)$ при $K_V = 0$ в этом случае называется универсальной кривой распыливания (на рис. 7.5 она представлена кривой 1). На рис. 7.5 приведены также кривые распыливания с $K_V \neq 0$.

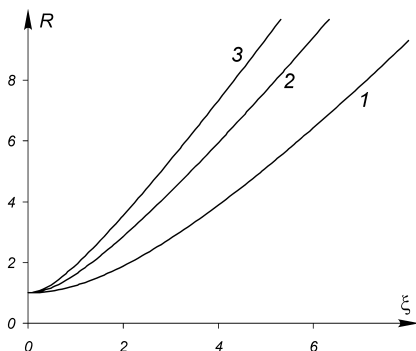


Рис. 7.5. Универсальные кривые распыливания интенсивного потока из состояния кроссовера:

$K_V = 0, 1, 2$ (кривые 1–3 соответственно)

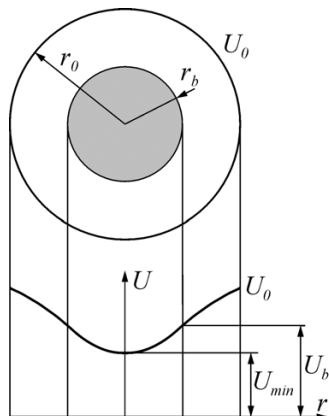


Рис. 7.6. Изменение потенциала пространства, вызванное присутствием интенсивного потока

Обсудим справедливость допущений, которые были сделаны в начале этого раздела относительно постоянства аксиальной скорости частиц и эквипотенциальности пространства. Для определенности будем считать, что пучок радиуса r_b находится в трубе радиуса r_0 , на которой поддерживается потенциал U_0 (рис. 7.6). Присутствие объемного заряда вызывает уменьшение потенциала пространства, это явление носит название *провисание потенциала*. Уменьшение потенциала ведет к уменьшению скорости частиц – пучок как бы запирает сам себя.

Применяя теорему Гаусса к цилиндрической поверхности единичной длины, внутри пучка имеем $2\pi r(-\partial U/\partial r) = -\pi r^2 \rho/\epsilon_0$, вне пучка – $2\pi r(-\partial U/\partial r) = -\pi r_b^2 \rho/\epsilon_0$. Отсюда находим потенциалы внутри пучка и между пучком и трубой:

$$U(0 \leq r \leq r_b) = \frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + U_{\min},$$

$$U(r_b \leq r \leq r_0) = \frac{\rho r_b^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} + U_0.$$

При $r = r_b$ эти выражения должны совпадать, что определяет U_{\min} . Это позволяет найти относительные провисания потенциалов внутри пучка и внутри трубы:

$$\frac{U_b - U_{\min}}{U_0} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0\sqrt{2\eta}U_0^{3/2}} = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{U_0 - U_{\min}}{U_0} = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}} \left(1 + 2 \ln \frac{r_0}{r_b} \right).$$

Здесь учтено $\rho = I / (\pi r_b^2 \sqrt{2\eta} U_0)$. Видно, что провисание сильно зависит от того, какую долю трубы занимает пучок. Если принять $r_b \approx r_0$, то при вполне приличном микропервансе $P_\mu \approx 3$ падение потенциала составит менее 5 % (а скорости – половину от этой цифры), что оправдывает принятые выше упрощения.

7.4. Образование виртуальных катодов и предельный ток

Эффект изменения потенциала пространства, исследованный в предыдущем разделе, оказался второстепенным, и мы им пренебрегли. Однако при больших плотностях токов в пучках ограниченных размеров потенциал может уменьшаться весьма значительно и достигать нуля. Это означает образование виртуального катода и, как правило, нарушение работы прибора. Действие пространственного заряда сильно зависит от граничных условий и геометрии устройства. Мы рассмотрим две противоположные геометрии – бесконечно широкий поток и длинный цилиндрический поток. Схема формирования бесконечно широкого потока дана на рис. 7.7, а. Потенциал сетки U_g регулирует плотность тока электронов, поступающих затем в пространство дрейфа $0 < z < d$. Считаем, что скорость электронов и плотность тока не зависят от перпендикулярных к плоскости рисунка координат, и задача оказывается одномерной. Распределение потенциала $U(z)$ в пространстве дрейфа определяется уравнением Пуассона

$$U''(z) = \frac{j}{\epsilon_0\sqrt{2\eta}U(z)}, \quad U|_{z=0} = U|_{z=d} = U_0, \quad U'|_{U=U_{\min}} = 0.$$

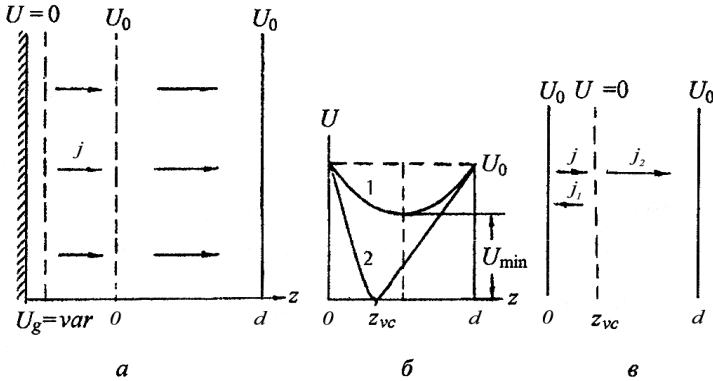


Рис. 7.7. Схема исследования интенсивного потока в пространстве дрейфа (а); распределение потенциала в пространстве дрейфа до и после образования виртуального катода (б); отражение части U_0 от виртуального катода (в)

Умножая это уравнение на U' и интегрируя, получим

$$U'^2 - \frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}} \sqrt{U} = \text{const} = -\frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}} \sqrt{U_{\min}} \rightarrow$$

$$\rightarrow U'^2 = \frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}} (U^{1/2} - U_{\min}^{1/2}).$$

Второе интегрирование дает

$$\frac{16}{9} (U^{1/2} - U_{\min}^{1/2}) (U^{1/2} + 2U_{\min}^{1/2})^2 = \frac{4j}{\varepsilon_0 \sqrt{2\eta}} \left(z - \frac{d}{2} \right)^2.$$

Фиксируем точку $z = 0$, $U = U_0$ (вход в пространство дрейфа) и выносим U_0 из-под корня:

$$\left(1 - \sqrt{\frac{U_{\min}}{U_0}} \right) \left(1 + 2\sqrt{\frac{U_{\min}}{U_0}} \right)^2 = \frac{9d^2 j}{16\varepsilon_0 \sqrt{2\eta} U_0^{3/2}} = \frac{j}{4j_d} = \frac{\tilde{j}}{4}.$$

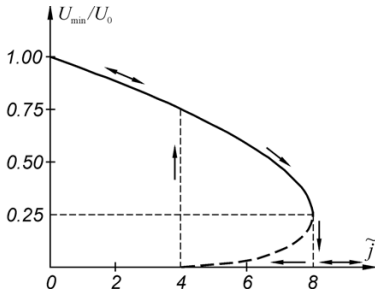


Рис. 7.8. Зависимость минимального потенциала от приведенной плотности тока

Здесь \tilde{j} – нормированная плотность тока, $j_d = 4\epsilon_0\sqrt{2\eta}U_0^{3/2}/(9d^2)$.

Как мы увидим далее, j_d есть плотность тока в плоском диоде с расстоянием между катодом и анодом d и разностью потенциалов между ними U_0 .

Зависимость U_{\min}/U_0 от \tilde{j} показана на рис. 7.8. Особый интерес здесь представляет точка при $\tilde{j} = 8$,

где касательная вертикальна. При переходе через эту точку режим резко меняется: потенциал скачком падает до нуля, образуется виртуальный катод (ВК) (см. рис. 7.7, б) и часть электронов начинает отражаться от него и возвращаться к входному электроду (рис. 7.7, в). При дальнейшем увеличении плотности тока режим с ВК остается. Если теперь уменьшать плотность тока, то режим ВК исчезнет (снова скачком) только в точке $\tilde{j} = 4$, т.е. имеет место эффект электронного гистерезиса. В диапазоне $4 \leq \tilde{j} \leq 8$ возможен режим как с ВК, так и без него (рис. 7.9).

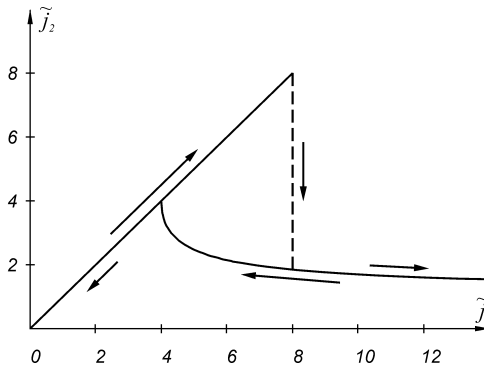


Рис. 7.9. Плотность тока на выходе из пространства дрейфа до и после образования виртуального катода

Рассмотрим подробнее работу прибора после образования ВК (см. рис. 7.7, в). Непосредственно перед образованием ВК распределение потенциала имеет вид кривой 1 с $U_{\min}/U_0 = 0,25$ при $z = d/2$; малейшее увеличение \tilde{j} приводит к скачкообразному образованию ВК, и распределение потенциала принимает вид кривой 2 на рис. 7.7, б, причем координата ВК $z_{U=0} = z_{vc} < d/2$. Объясняется это так. Справа от ВК образуется нормальный диод с напряжением U_0 , расстоянием $(l - z_{vc})$ и плотностью тока $\tilde{j}_2 = d^2/(d - z_{vc})^2$. Слева от ВК также появляется нормальный диод, в котором текут встречные токи \tilde{j} и \tilde{j}_1 . Но распределение потенциала зависит от объемной плотности зарядов, а от направления их движения в первом приближении не зависит, отсюда $2\tilde{j} - \tilde{j}_2 = d^2/z_{vc}^2$. Уравнение для определения координаты виртуального катода имеет вид

$$\frac{d^2}{(d - z_{vc})^2} + \frac{d^2}{z_{vc}^2} = 2\tilde{j}.$$

Например, при $\tilde{j} = 6$ координата ВК равна $z_{vc} = 0,32d$, $\tilde{j}_1 = 3,9$, $\tilde{j}_2 = 2,1$. Можно показать, что чем глубже в область ВК мы продвигаемся, тем ближе ко входу в область дрейфа располагается виртуальный катод.

При $\tilde{j} > 8$, как мы выяснили, работа без ВК невозможна. Найдем отвечающую этому порогу плотность тока

$$j_{vc} = 8j_d = \frac{32}{9d^2} \varepsilon_0 \sqrt{2\eta} U_0^{3/2} = 18,64 \cdot 10^{-6} \frac{U_0^{3/2}}{d^2},$$

где последнее равенство написано для электронов и имеет размерность $[A/cm^2]$.

Разберем теперь противоположный случай с тонким и длинным цилиндрическим потоком. Извлекаемый управляющей сеткой ток I поступает в канал радиуса r_0 с потенциалом U_0 (рис. 7.10), а чтобы он не оседал на стенках, вся система погружена в сильное аксиально-симметричное магнитное поле, и траектории при этом оказываются

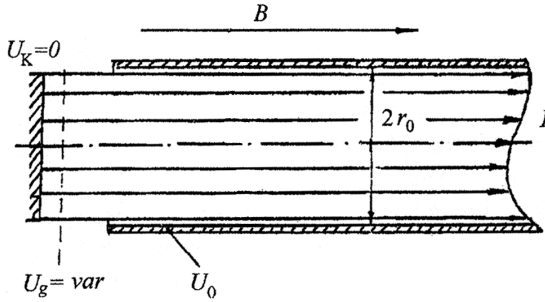


Рис. 7.10. Схема потока в длинном канале с внешним магнитным полем

параллельны оси z (движение замагниченного пучка будет рассмотрено в следующем разделе). Будем считать также, что радиус потока практически равен радиусу трубы. Поперечное распределение потенциала подчиняется уравнению Пуассона

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU(r)}{dr} \right) = \frac{I}{\pi \varepsilon_0 r_0^2 \sqrt{2\eta U(r)}},$$

$$U|_{r=r_0} = U_0, \quad \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0.$$

Введем относительный потенциал $\varphi(r) = U(r)/U_{\min}$ и новую независимую переменную (приведенный радиус):

$$\rho = \frac{r}{r_0} \left(\frac{I}{\pi \varepsilon_0 \sqrt{2\eta U_{\min}^{3/2}}} \right)^{1/2} = \frac{r}{r_0} \left(\frac{I U_0^{3/2}}{I_0 U_{\min}^{3/2}} \right)^{1/2},$$

где $I_0 = \pi \varepsilon_0 \sqrt{2\eta U_0^{3/2}}$. В этих переменных получим универсальное уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d\varphi}{d\rho} \right) = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \varphi|_{\rho=0} = 1, \quad \left. \frac{d\varphi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0.$$

Результаты численного анализа в виде графика $U(r)/U_{\min}$ в зависимости от ρ приведены на рис. 7.11, а, отношение U_{\min}/U_0 как функция I/I_0 показано на рис. 7.11, б.

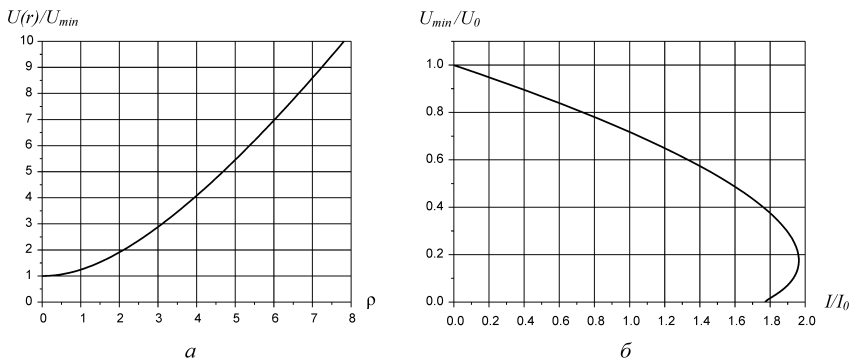


Рис. 7.11. Зависимость относительного потенциала от приведенного радиуса (а) и зависимость минимального потенциала от тока пучка (б)

Из последнего графика видно, что при $I/I_0 = 1,963$ и $U_{\min}/U_0 = 0,174$ скачком образуется виртуальный катод и имеет место электронный гистерезис. Отсюда легко найти предельный ток, выше которого работа без виртуального катода невозможна:

$$I_{vc} = 1,963\pi\epsilon_0\sqrt{2\eta}U_0^{3/2} = 32,4 \cdot 10^{-6}U_0^{3/2}, \quad (7.4)$$

где последнее равенство относится к электронам.

Картины образования и разрушения ВК для обеих рассмотренных геометрий качественно совпадают. А что показывает эксперимент? В целом описанные здесь явления скачкообразного возникновения ВК и электронного гистерезиса подтверждаются, но процесс носит весьма беспокойный характер и сопровождается мощными СВЧ-колебаниями. Эти колебания тем сильнее, чем глубже в области ВК находится система.

Как уже отмечалось, в основе механизма ВК лежат электростатические явления. Это навело американского физика Дж. Пирса на мысль компенсировать влияние пространственного заряда электронов пучка,

добавив в систему положительно заряженные ионы. Оказывается, что полностью снять проблему ограничения тока виртуальным катодом таким образом не удастся – мешают возникающие при этом плазменные неустойчивости, но предельные по ВК пороги при наличии ионной компенсации возрастают примерно в 5–6 раз.

7.5. Самофокусировка пучка заряженных частиц Пинч-эффект

Исследуем подробнее влияние упомянутой выше ионной компенсации на динамику релятивистского пучка. Примем, что электронный пучок представляет собой длинный цилиндр с однородной по сечению плотностью электронов. Как мы уже знаем (см. параграф 7.2), в таком пучке кулоновское расталкивание частично компенсируется магнитным стягиванием, так что результирующая сила уменьшается в γ^2 раз:

$$F_r = eE_r - evB_\alpha = eE_r \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

где E_r , B_α – собственные поля пучка.

Представим, что в пучке имеется некоторое количество равномерно распределенных положительных ионов, возникающих, например, за счет ионизации остаточного газа. Пусть их относительная концентрация $f = n_i/n_e$. Тогда их электрическое поле

$$E_{ri} = -f \cdot E_r,$$

а магнитным полем можно пренебречь ввиду их малой скорости. Полная сила, действующая теперь на крайние электроны:

$$F_r = eE_r \left(1 - \frac{v^2}{c^2} - f \right) = eE_r \frac{1 - \gamma^2 f}{\gamma^2}.$$

При $f = 1/\gamma^2$ расталкивание электронов полностью прекращается, а при $f > 1/\gamma^2$ сменяется стягиванием. Что же касается ионов, то при условии $f < 1$ они также стягиваются, поскольку суммарный про-

странственный заряд пучка остается отрицательным. Таким образом, в интервале

$$1/\gamma^2 < f < 1 \quad (7.5)$$

происходит так называемая самофокусировка пучка. Неравенство (7.5) называют *условием самофокусировки Беннета–Будкера*.

Самофокусировка электронов возможна и в нерелятивистском пучке, если только $f \approx 1$. Такой процесс действительно наблюдается при пропускании сильного тока через плазму и называется *пинч-эффектом* (от *англ.* pinch – сжатие). При этом происходит просто притяжение параллельных токов – эффект, который наблюдал еще А.М. Ампер.

Задания

7.1. Радиус круглого протонного пучка $r_0 = 1$ см, его ток $I = 1$ А, кинетическая энергия протонов $W = 120$ кэВ. Начальные скорости частиц параллельны оси z . Оценить, на каком расстоянии радиус пучка увеличится в 1,5 раза. Какую энергию должен иметь электронный пучок с тем же током, чтобы его расплывание было одинаковым?

7.2. Электронный пучок радиусом 1 см, с током 1 А, энергией частиц 100 кэВ и эмиттансом 10 см·мрад (распределение Капчинского–Владимирского) имеет кроссовер на входе в трубку дрейфа. Перед трубкой установлена фокусирующая линза. Численно определить максимальную длину трубки, через которую пучок пройдет без потерь, и оптимальное фокусное расстояние линзы. Сравнить со случаем нулевого эмиттанса.

7.3. Назовите основные отличительные свойства систем с виртуальным катодом.

8. НАЧАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ

8.1. Термоэлектронная эмиссия

Опыт показывает, что при достаточно высокой температуре все металлы испускают (эмитируют) со своей поверхности электроны, число которых быстро возрастает с температурой. Это явление получило название *термоэлектронной эмиссии (термоэмиссии)*. Вообще говоря, есть несколько различных по своей физической природе типов эмиссии (фотоэлектронная, автоэлектронная, вторичная), но термоэмиссия наиболее широко применяется для получения стационарных и квазистационарных электронных пучков, которые будут рассматриваться ниже.

Электрическая проводимость металлов обусловлена наличием в них *электронов проводимости*, образующих электронный газ. Концентрация (плотность) электронного газа очень высока, чем объясняется высокая удельная проводимость металлов. Хотя электроны проводимости ведут себя в металле во многих отношениях подобно газу (могут свободно перемещаться по всему объему металла, их плотность испытывает тепловые флуктуации, что обуславливает так называемый тепловой шум, и т. п.), но чтобы выйти за пределы объема металла, они должны совершить определенную работу, называемую работой выхода. При термоэлектронной эмиссии та дополнительная энергия, которая идет на преодоление работы выхода, сообщается электронам проводимости путем нагрева металла.

Есть два вида сил, препятствующих выходу электронов проводимости из металла. Преодоление этих сил и порождает работу выхода. Во-первых, в отсутствие внешних полей электронный газ «распространяется» за поверхность металла на расстояние порядка межатомных. Можно

считать, что этот поверхностный слой (его называют *двойной слой*) образует «плоский конденсатор», внешняя обкладка которого заряжена отрицательно. Соответственно, чтобы пролететь сквозь этот двойной слой, электрону необходима начальная энергия. Во-вторых, на электрон, находящийся над поверхностью проводника, действует притягивающая сила, которую можно определить как силу Кулона между электроном и его «зеркальным изображением». Чтобы преодолеть эту силу (уйти на бесконечное расстояние), электрону также требуется энергия.

Из высказанных выше соображений, можно рассчитать необходимую величину работы выхода, называемую *полной* работой выхода. Реальные работы выхода, измеряемые в экспериментах по термоэмиссии, оказались заметно меньше по величине. Это различие было объяснено на базе квантовой физики.

Суть объяснения заключается в следующем. Поскольку плотность электронного газа в металле весьма высока, электроны проводимости нельзя считать «свободными» в классическом смысле слова – они представляют единую квантовую систему. Согласно квантовым законам даже при абсолютном нуле температуры все электроны системы не могут иметь одинаковую – нулевую – энергию, поскольку в соответствии с квантовым запретом Паули в одном квантовом состоянии (с данной энергией) может находиться не больше двух электронов, отличающихся проекцией спина. Распределение электронов квантовой системы по энергиям в этом случае описывается статистикой Ферми–Дирака.

На рис. 8.1 изображено распределение свободных электронов в металле по энергиям для двух значений температуры: $T = 0 \text{ К}$ и $T > 0 \text{ К}$. Максимальная энергия при 0 К называется *уровнем Ферми* (или энергией Ферми, или химическим потенциалом идеального электронного газа). Поскольку при термоэмиссии металл покидают наиболее энергичные электроны, имеющие энергию, близкую к энергии Ферми, то можно считать, что для выхода им нужна лишь дополнительная энергия, равная разнице между полной работой выхода и энергией Ферми. Эту дополнительную энергию и называют работой выхода, для чистых

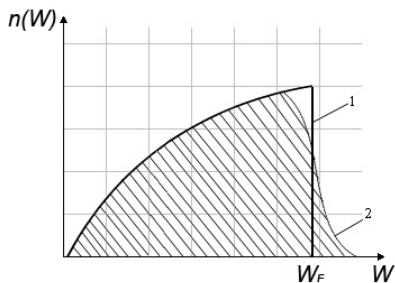


Рис. 8.1. Распределение свободных электронов по энергиям:

1 – $T = 0 \text{ К}$; 2 – $T > 0 \text{ К}$

металлов она составляет несколько электронвольт. Например, работа выхода меди составляет 4,4 эВ, вольфрама – 4,54, никеля – 4,5 эВ.

При заданном материале и температуре эмитирующей поверхности плотность тока термоэмиссии определяется формулой Ричардсона–Дешмана:

$$j_{em} = AT^2 \exp\left(-\frac{W_A}{kT}\right),$$

$$A = \frac{4\pi mk^2 e}{h^3} = 120 \cdot 10^4 \text{ A}/(\text{M}^2 \cdot \text{K}^2),$$

где T – температура катода; W_A – работа выхода; k – постоянная Больцмана; e , m – заряд и масса электрона; h – постоянная Планка.

Чистые металлы необходимо нагреть до высокой температуры, чтобы сообщить электронам проводимости энергию для преодоления достаточно большой работы выхода и получить заметную плотность тока эмиссии. Так, рабочая температура вольфрамового катода составляет порядка 2300 °С. Этому недостатка лишены *оксидные* катоды. Оксидный катод состоит из слоя кристаллов тройного или двойного оксида щелочно-земельных металлов на металлической подложке – керне. Слой имеет толщину от 1 до 100 мкм, размер кристаллов – от 0,1 до 10 мкм. Часто для оксидного слоя используется твердый раствор тройного оксида BaO–SrO–CaO (бария и стронция примерно поровну, кальция – единицы процентов). С обратной стороны керна расположен нагреватель. Низкая работа выхода оксидного слоя позволяет получать при малых временах эмиссии плотность тока эмиссии порядка 20 А/см², при длительной эмиссии – порядка 5 А/см²; рабочая температура катода должна составлять 700...800 °С. К сожалению, оксидные катоды не лишены и недостатков. Основной из них – ограниченное время службы, которое к тому же сильно падает при увеличении рабочей температуры.

8.2. Плоский диод

Модель плоского диода включает в себя два бесконечных параллельных друг другу плоских электрода, отстоящих на расстояние d друг от друга, один из которых является катодом. Предполагается, что катод заземлен, а потенциал анода U_a можно регулировать. Без учета

объемного заряда эта система представляла бы собой обычный плоский конденсатор с линейно возрастающим потенциалом и однородным полем:

$$U(z) = U_a \frac{z}{d}, \quad E(z) = -\frac{U_a}{d} = \text{const.}$$

Необходимо найти ток, попадающий на анод, и распределение потенциала и поля вдоль диода с учетом объемного заряда пучка. Естественно, для этого необходимо знать параметры эмиссии с катода. Важным фактом является то, что вылетающие электроны имеют разброс начальных скоростей; для его описания хорошо подходит распределение Максвелла.

Во-первых, рассмотрим случай $U_a = 0$, т.е. катод и анод имеют одинаковый потенциал. Очевидно, что объемный заряд вызовет уменьшение потенциала пространства (см. кривую 4 на рис. 8.2), следовательно, $U(z)$ будет иметь минимум $U_{\min} < 0$ на каком-то расстоянии от катода z_{\min} . Это означает, что в промежутке от 0 до z_{\min} электроны движутся в задерживающем поле, а в промежутке от z_{\min} до анода – в ускоряющем; образуется потенциальный барьер высотой U_{\min} . Часть эмитированных электронов, продольной энергии которых недостаточно, чтобы преодолеть этот барьер, отразится назад на катод, оставшая часть сможет его преодолеть, долетит до анода и поглотится на нем. Таким образом, в цепи анода начнет протекать ток, меньший, чем полный ток термоэмиссии.

Если подавать на анод отрицательные напряжения относительно катода, то величина минимума потенциала будет увеличиваться, а его положение будет сдвигаться к аноду (кривая 3 на рис. 8.2). Естественно, анодный ток при этом будет уменьшаться. Если дальше уменьшать анодный потенциал, то при каком-то его значении положение минимума совпадет с анодом, и весь путь от катода до анода электроны будут двигаться в задерживающем поле (кривая 2).

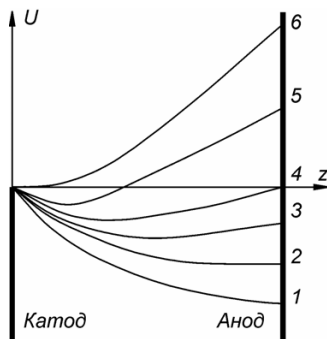


Рис. 8.2. Распределение потенциала в плоском диоде в зависимости от потенциала анода

При подаче на анод положительного напряжения распределение потенциала в пространстве катод–анод по-прежнему будет иметь минимум отрицательного потенциала, величина которого с увеличением U_a уменьшается, а положение – смещается по направлению к катоду (кривая 5). При дальнейшем увеличении U_a положение минимума потенциала совпадает с катодом, потенциал во всей области катод–анод станет положительным, а поле – ускоряющим (кривая 6). При этом все эмитированные с катода электроны попадают на анод. Казалось бы, при дальнейшем увеличении U_a ток должен оставаться неизменным – достигнут предел по току эмиссии. Однако в реальности наблюдается слабый рост анодного тока, объясняющийся *эффектом Шоттки* – вытягивающее поле на поверхности катода уменьшает работу выхода, и ток эмиссии увеличивается.

Таким образом, можно выделить три характерных режима работы диода:

- 1) режим начальных токов, при котором кривая распределения потенциала в промежутке катод–анод не имеет минимума;
- 2) режим ограничения тока объемным зарядом, при котором в пространстве анод–катод существует минимум потенциала;
- 3) режим токов насыщения, при котором потенциал в пространстве анод–катод всюду положителен относительно катода, а величина тока слабо растет с ростом потенциала анода вследствие эффекта Шоттки.

Зависимость плотности анодного тока от напряжения анода показана на рис. 8.3.

В режиме ограничения тока объемным зарядом расчет тока анода представляет собой достаточно сложную задачу, поскольку неизвестно ни положение минимума потенциала, ни его величина. К счастью, существует большой практически важный диапазон, в котором z_{\min} и U_{\min} настолько малы, что ими можно пренебречь, а плотность анодного тока остается заметно меньше плотности тока эмиссии. Таким образом, предпола-

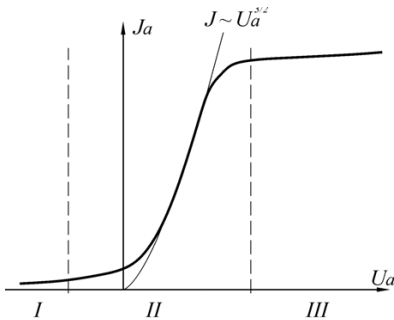


Рис. 8.3. Вольт-амперная характеристика вакуумного диода:

- I* – режим начальных токов; *II* – режим ограничения тока объемным зарядом;
III – режим насыщения

гаем, что минимум потенциала находится на самом катоде, и пренебрегаем тепловым разбросом (т.е. начальные скорости электронов равны нулю).

При сделанных выше предположениях можно легко и понять, и рассчитать, каков будет анодный ток. Действительно, поскольку минимум потенциала находится на катоде, то поле на катоде равно нулю. Можно понять, что ток в промежутке катод–анод должен установиться таким, чтобы выполнялось это условие. Если ток больше, то будет больше объемного заряда в этом промежутке, и он запирает лишнюю эмиссию с катода (поле на катоде будет запирающее). Если ток меньше, то объемного заряда будет меньше, поле на катоде станет вытягивающее и ток увеличится.

Рассчитаем величину анодного тока. Выражаем скорость электронов:

$$\frac{mv^2}{2} - eU(z) = 0 \Rightarrow v(z) = c\sqrt{\frac{2eU(z)}{mc^2}}.$$

Здесь $e > 0$ – модуль заряда электрона. Плотность объемного заряда можно найти через плотность тока и скорость:

$$j = \rho v \Rightarrow \rho(z) = \frac{j}{c}\sqrt{\frac{mc^2}{2eU(z)}}.$$

Уравнение Пуассона примет вид

$$\Delta U = \frac{d^2U}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{j}{c\varepsilon_0}\sqrt{\frac{mc^2}{2eU(z)}} = \frac{a}{U(z)}, \quad (8.1)$$

$$a = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}.$$

Первый интеграл уравнения (8.1)

$$\left(\frac{dU}{dz}\right)^2 = 4a\sqrt{U} + A.$$

Поскольку мы приняли, что поле на катоде равно нулю, то константа интегрирования $A = 0$. Второе интегрирование дает

$$U(z) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{az} + B \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Потенциал катода равен нулю, следовательно $B = 0$. Окончательно получаем распределение потенциала и поля в плоском диоде:

$$U(z) = U_a \left(\frac{z}{d} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad E(z) = -\frac{4}{3} \frac{U_a}{d} \left(\frac{z}{d} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Видно, что везде в промежутке катод–анод потенциал диода меньше, чем потенциал конденсатора, – мы опять встречаемся с провисанием потенциала из-за влияния объемного заряда. Распределения полей в диоде и в конденсаторе различаются гораздо сильнее – поле диода проваливается до нуля на катоде и превышает в $4/3$ раза поле конденсатора на аноде.

Вспоминая выражение для коэффициента a из (8.1), находим

$$\left(\frac{3}{2} \sqrt{a} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{U_a}{d^{4/3}} \Rightarrow -\frac{j}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} = \frac{4}{9} \frac{U_a^{3/2}}{d^2}.$$

В дальнейшем опустим знак «минус» – он лишь показывает, что отрицательные заряды двигаются в положительную сторону. Окончательно получаем выражение для плотности тока в плоском диоде при ее ограничении объемным зарядом (с учетом сделанных выше предположений):

$$j = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_a^{3/2}}{d^2} \approx 2,33 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}}{d^2}. \quad (8.2)$$

Из этого выражения следует закон *Чайлда–Ленгмюра*, или закон «трех вторых»: плотность тока в плоском диоде пропорциональна разности потенциалов между катодом и анодом в степени трех вторых и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Закон «трех вторых» справедлив внутри области анодных напряжений, при которых плоский диод работает в режиме ограничения тока объемным

зарядом (середина области II на рис. 8.3). Ближе к ее границам, в переходных областях между этим режимом и режимом начальных токов и режимом токов насыщения, реальная плотность тока отклоняется от значения, даваемого формулой (8.2).

8.3. Плоская пушка Пирса

Первая теория начального формирования интенсивных потоков электронов в электронных пушках была разработана в 1940 году американским физиком Дж. Пирсом. Он рассмотрел случай, когда эмиссия идет только с части катода диода одной из простейших геометрических форм – плоского, цилиндрического или сферического.

В плоском диоде траектории частиц прямолинейны и параллельны друг другу. Если электроны эмитирует лишь часть катода (в виде ленты или круга, рис. 8.4), то этот поток, будучи предоставлен сам себе, под влиянием сил пространственного заряда неминуемо расплывется. Чтобы этого не произошло, необходимо действие отброшенной части электронов заменить действием размещаемой на их месте специальной системы электродов. Формы этих электродов должны быть подобраны так, чтобы вдоль границы «оставшегося в живых» потока распределение потенциала и его нормальной производной точно совпадало с тем, что имело место в исходном бесконечном диоде. В рассматриваемом случае потенциал вдоль границы пучка должен подчиняться закону примерно $z^{4/3}$, а нормальная к границе производная потенциала равняться нулю (последнее требование необходимо для сохранения прямолинейности траекторий).

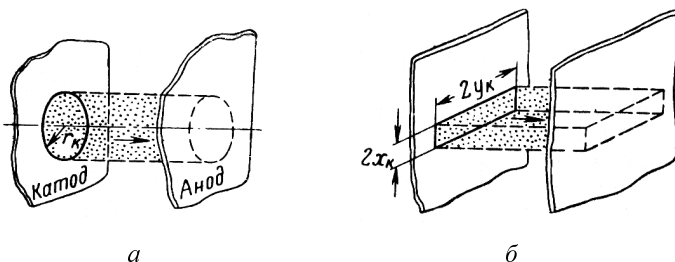


Рис. 8.4. Получение аксиально-симметричного (а) и ленточного (б), ($y_k \gg x_k$) пучков из конечной части плоского диода

В случае ленточного пучка задача допускает точное аналитическое решение. Определим комплексную переменную $\xi = z + ix$, где действительная ось совпадает с границей пучка ($z, x = 0$), а мнимая ось x направлена вверх. Введем в верхней полуплоскости аналитическую функцию комплексного переменного ξ вида $U(\xi) = C\xi^{4/3}$, которая на действительной оси удовлетворяет условиям

$$U(\xi)|_{x=0} = Cz^{4/3}, \quad \left. \frac{\partial U(\xi)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Эти условия совпадают с указанными выше требованиями к распределению потенциала вдоль границы пучка, и функция $U(\xi) = C\xi^{4/3}$ является, таким образом, точным аналитическим продолжением функции $U(z, x = 0) = Cz^{4/3}$ с действительной оси в мнимую полуплоскость.

Чтобы найти формы электродов, надо в верхней полуплоскости решить уравнение Лапласа (в данном случае в декартовой системе координат), построить эквипотенциали и придать электродам их форму. Но выше было показано, что как действительная, так и мнимая части любой аналитической функции порознь удовлетворяют уравнению Лапласа, и потому искомое решение можно представить в виде действительной части функции $U(\xi) = C\xi^{4/3}$:

$$U(x, y) = \operatorname{Re}\left(C\xi^{4/3}\right) = C\left(x^2 + y^2\right)^{2/3} \cos\left(\frac{4}{3}\theta\right),$$

где $\theta = \arctan(x/y)$. Все эквипотенциали с $U(x, y) = \text{const} \neq 0$ подходят к границе пучка под прямым углом (рис. 8.5). Нулевая (прикатодная) эквипотенциаль особая, она определяется из условия $\cos(4/3\theta) = 0$ и подходит к границе пучка под углом $\theta_k = 3\pi/8 = 67,5^\circ$. Этот угол носит название *угла Пирса*. Ниже будет показано, что прикатодный угол такой величины характерен для всех систем, работающих в режиме трех вторых. Конфигурация электродов пушки Пирса с ленточным катодом и эквипотенциали в ней показаны на рис. 8.5.

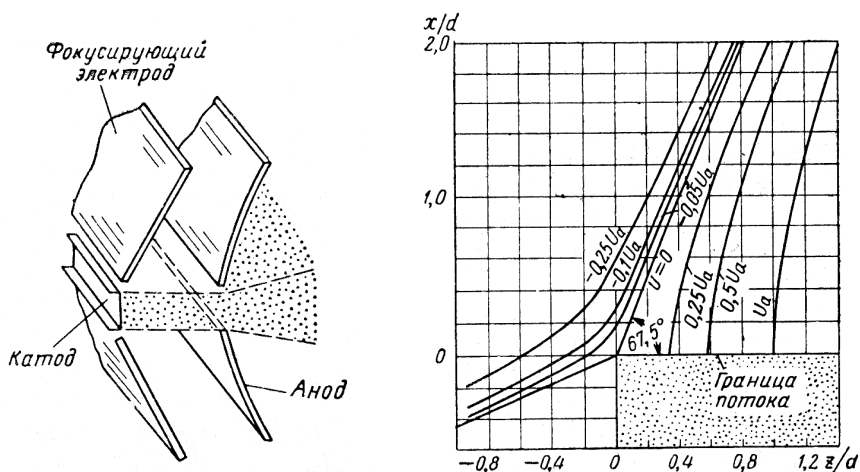


Рис. 8.5. Конфигурация электродов и эквипотенциали в пушке Пирса, формирующей ленточный пучок

Поскольку для оставшейся части пучка в пушке Пирса создаются такие же условия, как и в плоском диоде, плотность тока электронного пучка остается неизменной. Отсюда находим ток в пушке Пирса с плоским катодом:

$$I = j \cdot S_c = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} U_a^{3/2} \frac{S_k}{d^2},$$

где S_k – площадь, с которой идет эмиссия (площадь катода). Первенец пушки Пирса определяется только геометрией самой пушки:

$$P = \frac{I}{U^{3/2}} = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{S_c}{d^2} \approx 2,33 \cdot 10^{-6} \frac{S_c}{d^2}.$$

Сразу же обратим внимание на тот факт, что в теории Пирса не учитывается наличие анодного отверстия, которое необходимо для выхода потока из зоны пушки. В теории анод представляется как непрерывный электрод, перпендикулярный пучку в области его падения. На практике же анодное отверстие проявляет себя как сильная рассеивающая линза, поскольку до него поле есть, а после – как правило,

нет (рис. 8.6). На первых порах этот факт пытались скомпенсировать тем, что затягивали анодное отверстие металлической сеткой. Но густые сетки перехватывали заметную долю тока, горели, газили, а редкие – плохо воспроизводили эквипотенциальную поверхность, и от этой практики быстро отказались. Ниже будет показано, что именно возмущающее влияние анодного отверстия кладет предел верхней величине микропереванса $P_{\mu} \leq 1 \text{ мкА/В}^{3/2}$, достижимой в пушках Пирса.

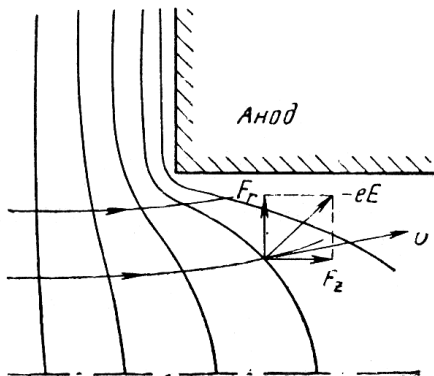


Рис. 8.6. Анодное отверстие как сильная рассеивающая линза

Найдем, как из-за влияния анодной линзы расходитя по выходе из пушки ленточный пучок (рис. 8.7). Вспоминая приближенное выражение для фокусного расстояния диафрагмы-щели

$$f_D = \frac{2U_a}{E_1 - E_2} = -\frac{3d}{2}, \quad E_1 = -\frac{4}{3} \frac{U_a}{d}, \quad E_2 = 0,$$

находим угол расходимости для ленточного пучка после анодной щели шириной $2x_a$:

$$\tan \gamma_a = \frac{x_a}{|f_D|} = \frac{2}{3} \frac{x_a}{d}.$$

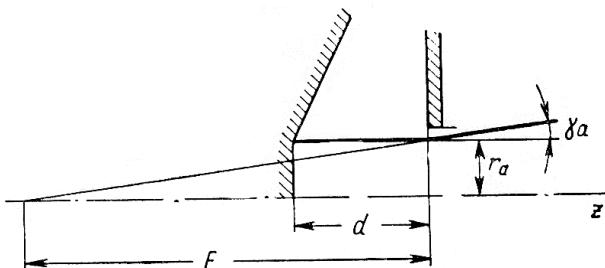


Рис. 8.7. Определение фокусного расстояния анодной линзы

Угол выхода частиц из пушки не зависит от напряжения на аноде. Он, как и микропервеанс P_μ , определяется только геометрией. С ростом первеанса расстояние d уменьшается и расходимость растет. Более аккуратная формула для ленточного пучка имеет вид

$$\tan \gamma_a = \frac{2}{3} \frac{x_a}{d} \left(1 + \frac{\sqrt{P_\mu}}{4} \right).$$

Перейдем к рассмотрению пушек, создающих параллельный цилиндрический пучок. Такие пушки также могут быть получены на базе плоского диода, только эмитирующей поверхностью является в этом случае не бесконечная лента, а круг. Картина здесь резко отличается от рассмотренного выше случая ленточного пучка, поскольку представить распределение потенциала вдоль границы пучка в замкнутой форме здесь не удастся. Дело сильно осложняется тем, что решение уравнения Лапласа (как и любого другого дифференциального уравнения эллиптического типа) с заданными на разомкнутой поверхности граничными условиями Коши оказывается неустойчивым. Мы уже сталкивались с этим явлением при построении рядов для потенциала и компонент напряженности электрического поля в аксиально-симметричном случае. Это означает, что при точно заданных граничных условиях решение также оказывается точным, но любая ошибка в их задании экспоненциально быстро нарастает. Известны примеры, когда удержание в одном случае трех, а в другом – шести членов разложения потенциала в ряд для одной и той же задачи приводило к совершенно разным картинам электродов. Долгое время для получения правильной геометрии эквипотенциалей надежным считалось только применение экспериментальных методов, в частности электролитической ванны.

Остроумное решение этой проблемы было найдено американским физиком К. Дж. Харкером, который предложил использовать аналитическое продолжение самого уравнения Лапласа. Пусть x, y – координаты, в которых записано исходное уравнение Лапласа. Введем дополнительную мнимую ось x_2 :

$$x = x_1 + ix_2 .$$

Поверхность $x_2 = 0$ соответствует первоначальной физической системе. Можно показать, что в координатах x_2, y возникает уравнение гиперболического типа, решения которого устойчивы:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \rightarrow -\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 .$$

На рис. 8.8 показаны конфигурация электродов пушки Пирса с цилиндрическим пучком и эквипотенциали в ней, полученные по методу Харкера. Угол между пучком и нулевой эквипотенциалью составляет $67,5^\circ$.

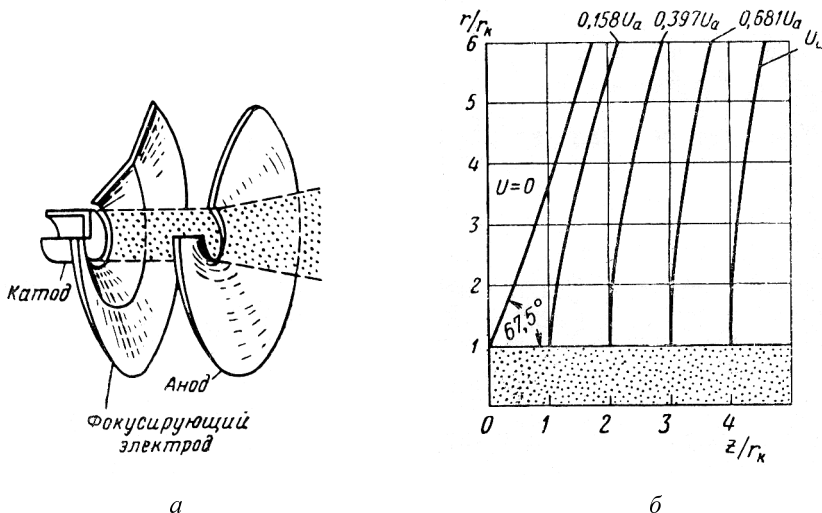


Рис. 8.8. Конфигурация электродов и эквипотенциали в пушке Пирса, формирующей цилиндрический пучок

Угол расходимости цилиндрического потока по выходе из пушки под влиянием анодного отверстия радиусом r_a определяется по формуле

$$\tan \gamma_a = \frac{1}{3} \frac{r_a}{d} \left(1 + \frac{\sqrt{P_\mu}}{4} \right).$$

8.4. Сферический диод

Кроме модели плоского диода, часто используются модели цилиндрического и сферического диодов. Цилиндрический диод образуют два бесконечно длинных коаксиальных цилиндрических электрода, один из которых – катод, второй – анод. В сферическом диоде катод и анод – это два сферических электрода, заключенных один внутри другого, с общим центром. За счет симметрии траектории электронов в этих диодах также являются прямыми линиями, но, в отличие от плоского диода, не параллельны друг другу. Если катод имеет бóльший радиус, чем анод, то электронный поток сходится и говорят о случае *вогнутого* катода. Если наоборот, то катод *выпуклый* и поток расходится.

Очевидно, что характерные режимы работы плоского, цилиндрического и сферического диодов качественно совпадают. Более того, как уже было показано, при ограничении эмиссии объемным зарядом первеанс системы является константой, поэтому плотность тока в любом диоде будет пропорциональна $U_a^{3/2}$, а отличаться будет только зависимость от геометрических размеров.

Рассмотрим случай сферического диода с радиусами катода и анода r_{ct} и r_a соответственно. Связь между полным током пучка, анодным напряжением и геометрией системы определяется из решения уравнения Пуассона, которое с учетом симметрии системы принимает в сферической системе координат вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = \frac{j}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2eU(r)}}.$$

Для режима ограничения эмиссии объемным зарядом приближенные граничные условия остаются прежними – потенциал и поле на катоде равны нулю, $U(r_a) = U_a$. Решение этого уравнения дает распределение потенциала по радиусу:

$$U(r) = U_a \left(\frac{\alpha(\rho)}{\alpha(\rho_a)} \right)^{4/3}.$$

Здесь введен относительный радиус $\rho = r_{ct}/r$; $\rho_a = r_{ct}/r_a$. Функция $\alpha(\rho)$ носит название функции Ленгмюра, график $\alpha^2(\rho)$ приведен на

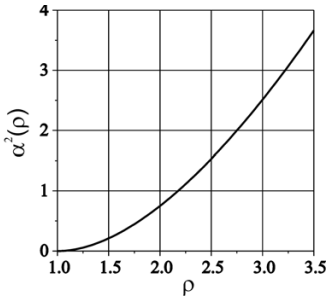


Рис. 8.9. Зависимость квадрата функции Ленгмюра от относительного радиуса

рис. 8.9. Если обозначить $\gamma = \ln(\rho)$, то функцию Ленгмюра можно представить в виде ряда

$$\alpha(\gamma) = \gamma + 0,3\gamma^2 + 0,075\gamma^3 + 0,01432\gamma^4 + \dots$$

Ток в сферическом диоде оказывается независим от его абсолютных размеров:

$$I_S = \frac{16\pi\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha^2(\rho_a)}.$$

Плотность тока эмиссии с катода

$$j_{ct} = \frac{I_S}{4\pi r_{ct}^2} = \frac{4}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha^2(\rho_a) r_{ct}^2}.$$

Заметим, что если анод достаточно близок к катоду, то $\ln(\rho_a) \approx (r_{ct} - r_a)/r_{ct} = d/r_{ct}$ (здесь d – расстояние между электродами) и плотность тока сферического диода становится равной плотности тока плоского диода, т.е. определяется формулой Чайлда–Ленгмюра.

8.5. Сферическая пушка Пирса

Недостатком рассмотренных выше пушек Пирса с плоским катодом является то, что из-за влияния анодного отверстия пучки начинают расходиться сразу же после выхода из пушки. Возможно преодолеть этот недостаток, если в самой пушке пучок будет сходящимся. Тогда появляется возможность не только скомпенсировать расхождение, вызванное анодной линзой, но и вынести кроссовер пучка за анод.

Как и в случае плоской пушки Пирса, для получения пушек Пирса со сходящимся потоком используется часть сферического диода, образованного конусом с центром, совпадающим с центром сферических электродов. Обозначим символом θ полуугол раствора конуса. На попавших внутрь этого конуса элементах сформируем пушку Пирса, приняв часть внешней сферы за катод, а внутренней – за анод. Поскольку при этом эмитировать электроны будет только поверхность катода $S_{ct} = 2\pi r_{ct}^2 (1 - \cos \theta)$, ток такой пушки равен

$$I = I_S \frac{2\pi r_{ct}^2 (1 - \cos \theta)}{4\pi r_{ct}^2} = \frac{8\pi\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha^2 (\rho_a)} (1 - \cos \theta).$$

Форма наружных электродов, заменяющих своим действием влияние отброшенной части потока полного сферического диода, может быть определена численно по методу Харкера. Пример найденных таким путем эквипотенциалей приведен на рис. 8.10. Интересно, что и в

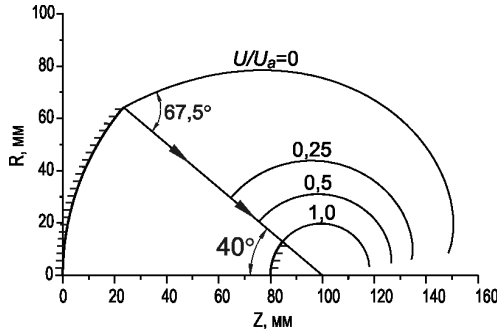


Рис. 8.10. Эквипотенциалы в сферической пушке Пирса с полууголом раствора конуса 40° и отношением $r_{ct}/r_a = 5$

случае сферического катода угол между пучком и прикатодным электродом также составляет $67,5^\circ$. Действительно, рассмотрим очень малую область, включающую в себя линию границы между катодом и прикатодным электродом. В этой области кривизна такой линии заметна не будет, и повторится случай плоского катода. Отклонения начнут проявляться только по мере увеличения рассматриваемой области.

Кроме упомянутой выше компенсации действия анодной линзы, сходящийся поток имеет и другие достоинства. Его использование позволяет резко повысить плотность тока в пучке по сравнению с плотностью тока эмиссии катода. Отношение площади катода к площади поперечного сечения пучка в канале транспортировки (компрессия потока C_s) в пушках со средним и с высоким первеансом $P_\mu \sim 1 \dots 5$ может достигать сотен и даже тысяч.

Благодаря взаимодействию электронов потока с остаточным газом в канале транспортировки рождаются ионы, которые устремляются к катоду и бомбардируют его. Поскольку тяжелые ионы на этом пути не успевают заметно разойтись, в пушках с высокой компрессией такой бомбардировке подвергается лишь малая поверхность в центре катода, что существенно продлевает срок его службы.

8.6. Отличия реальных электронных пушек

Как уже было упомянуто выше, основным отличием реальных электронных пушек является наличие анодного отверстия. Помимо рассеивания пучка, анодное отверстие ограничивает микропервеанс величиной примерно $1 \text{ мкА/В}^{3/2}$. Поскольку микропервеанс пушки P_μ пропорционален отношению площади катода S_k к квадрату расстояния между катодом и анодом d , то логично для его увеличения увеличивать отношение S_k/d . Однако из-за влияния анодного отверстия это приводит:

- 1) к неравномерности тока эмиссии с катода;
- 2) к снижению микропервеанса по сравнению с расчетным;
- 3) к появлению сильных aberrаций анодной линзы, приводящих к пересечению электронных траекторий, неламинарности потока и, в конечном счете, росту эмиттанса пучка.

В динамике сильноточных и высоковольтных пучков большую роль начинает играть собственное магнитное поле, которое в силу геометри-

ческой симметрии действительно отсутствует в плоском, цилиндрическом и сферическом диодах, но имеет место в организованных на их базе пушках.

Так как оксидный катод в процессе работы нагрет до высокой температуры, необходим зазор между катодом и прикатодным электродом (рис. 8.11). Этот зазор должен быть достаточно велик, чтобы подавить паразитную эмиссию с прикатодного электрода и без заметного увеличения мощности накала обеспечить необходимый нагрев всей поверхности катода. Наличие этого зазора всегда приводит к искривлению эквипотенциалей вблизи кромки катода и «возмущению» крайних траекторий.

К размыванию границ пучка в реальных термоэлектронных пушках также приводят начальные тепловые скорости электронов.

И, наконец, электроды идеальной пушки Пирса имеют гладкую сложную форму. На практике довольствуются огрубленным приближением, которое в любом случае проходит этап численного моделирования.

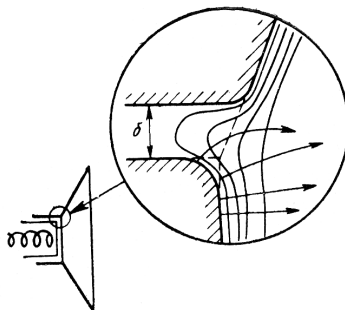


Рис. 8.11. Зазор между катодом и прикатодным электродом

8.7. Формирование интенсивных потоков магнитным полем

Как было показано ранее, в отсутствие внешних фокусирующих полей интенсивный пучок расширяется. Его размер можно ограничить, разместив вдоль его пути фокусирующие линзы. Размер пучка при этом будет непостоянен вдоль оси z – радиус огибающей будет иметь максимумы в области линз, и минимумы – в промежутках между ними (сравните с решением, которое представлено на рис. 8.6). Возникает вопрос: возможно ли создать вдоль оси z постоянную фокусирующую силу, которая скомпенсировала бы силу кулоновского расталкивания и обеспечила бы постоянный радиус интенсивного пучка? Такой режим

необходим, например, для работы мощных электронно-лучевых СВЧ-приборов, источников ионов с электронным пучком и т.д. Оказывается, это возможно сделать при помощи однородного магнитного поля, направленного вдоль движения пучка.

На рис. 8.12 показана аксиально-симметричная система, в которой распространяется поток заряженных частиц. На эту систему наложено магнитное поле с одной особенностью: начиная с некоторой координаты z_c это поле становится однородным $B(z \geq z_c) = B_c = \text{const}$, внешнее электрическое поле при этом отсутствует. Мы исследуем два случая:

- 1) катод экранирован от магнитного поля;
- 2) катод находится в магнитном поле.

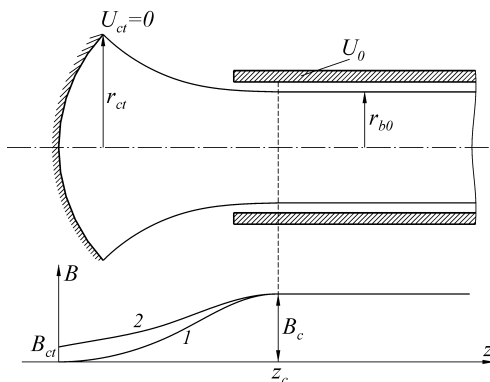


Рис. 8.12. Схема формирования интенсивного потока магнитным полем:

катод полностью (кривая 1) или частично (кривая 2) экранирован от магнитного поля

В предыдущих разделах было показано, что в аксиально-симметричном магнитном поле действует закон сохранения, называемый теоремой Буша: вдоль траектории частицы выполняется соотношение $r^2 \dot{\theta} - \eta \Psi(r, z) / 2\pi = C_\alpha = \text{const}$ (θ – азимутальная координата). Здесь $\Psi(r, z)$ – поток магнитного поля через поверхность, которая опирается на окружность, образованную вращением вокруг оси точки

(r, z) . Если у рассматриваемой частицы на катоде был радиус r_{ct} и нулевая азимутальная скорость, то в параксиальном приближении

$$C_\alpha = -\frac{\eta r_{ct}^2 B_{ct}}{2}, \quad \dot{\theta}(z) = \frac{\eta B_0(z)}{2} \left[1 - \frac{B_{ct}}{B_0(z)} \left(\frac{r_{ct}}{r} \right)^2 \right],$$

где B_{ct} – поле на катоде и $B_0(z)$ – поле вдоль оси системы. Движение одной частицы описывается при этом уравнением (3.20), в котором при отсутствии электрического поля надо положить $U_0(z) = U_0 = \text{const}$.

Примем, что поток имеет нулевой фазовый объем. Это позволит рассматривать только траекторию крайней частицы $r_b(z)$. Добавив к (3.20) силу кулоновского расталкивания, получаем уравнение для огибающей потока

$$\begin{aligned} r_b'' + r_b \frac{\eta B_0^2(z)}{8U_{\min}} \left[1 - \frac{B_{ct}^2}{B_0^2(z)} \left(\frac{r_{ct}}{r_b} \right)^4 \right] - \frac{I}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}\eta U_{\min}^{3/2}} \frac{1}{r_b} = \\ = r_b'' + r_b \frac{\eta B_0^2(z)}{8U_{\min}} \left[1 - \frac{B_{ct}^2}{B_0^2(z)} \left(\frac{r_{ct}}{r_b} \right)^4 \right] - \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}r_b} = 0. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Здесь U_{\min} , как будет показано ниже, есть потенциал на оси пучка.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} s = \frac{z}{r_{b0}}, \quad R = \frac{r}{r_{b0}}, \quad b(s) = \frac{B_0(z)}{B_c}, \quad \alpha = \frac{\eta B_c^2}{8U_{\min}} r_{b0}^2, \\ K = \frac{B_{ct}^2}{B_c^2} \left(\frac{r_{ct}}{r_{b0}} \right)^4, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где r_{b0} – масштаб длины, который нам еще предстоит определить. Входящие в (8.4) величины α и K носят названия параметра магнит-

ного поля и параметра катодных условий соответственно. Используя (8.4), перепишем уравнение (8.3):

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \alpha b^2(s) R - \frac{\alpha K}{R^3} - \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2} R} = 0,$$

которое в зоне однородности $z \geq z_c$ принимает вид

$$\frac{d^2 R}{ds^2} + \alpha R - \frac{\alpha K}{R^3} - \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2} R} = 0. \quad (8.5)$$

Видно, что в этой зоне возможен режим движения с постоянным радиусом $R = 1$, если выполнено условие

$$\alpha(1 - K) - \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}(1 - K)}.$$

Раскрывая это равенство согласно (8.4), находим

$$r_{b0}^2 = \frac{8U_{\min}}{\eta B_c^2} \frac{\tilde{P}}{\sqrt{2}(1 - K)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi \epsilon_0 \eta^{3/2}} \frac{I}{B_c^2 \sqrt{U_{\min}} (1 - K)}. \quad (8.6)$$

Равенство (8.6) показывает, что в зоне однородного поля интенсивный поток может распространяться не расширяясь, в форме цилиндра постоянного радиуса. Для реализации этого режима надо так организовать динамику в переходной зоне, чтобы обеспечить $r_b = r_{b0}$ и $r_b' = 0$ на входе в однородное поле при $z = z_c$. Величину такого равновесного радиуса r_{b0} мы и приняли в (8.4) за единицу длины. Из (8.6) видно, что равновесный режим возможен при любых условиях на катоде $K \leq 1$. Мы начнем рассмотрение со случая экранированного катода $K = 0$, который называется *режимом Бриллюэна*.

Случай полностью экранированного катода

При $K = 0$ (рис. 8.12, кривая I в распределении индукции) равновесный радиус $r_{b0} = r_B$ при прочих равных условиях получает наименьшее значение. Из теоремы Буша (3.14) следует, что при $B_{ct} = 0$ в зоне однородности $B_c = B_B$ все частицы потока независимо от их

радиуса приобретают угловую скорость $\dot{\theta} = \eta B_B / 2 = \omega_L$, т.е. весь поток вращается как твердое тело вокруг оси z .

Анализ баланса сил показывает, что в любой точке потока направленная к центру сила Лоренца точно уравновешивает направленные от центра кулоновскую и центробежную силы (рис. 8.13):

$$e \frac{\partial U}{\partial r} + mr \left(\frac{\eta B_B}{2} \right)^2 - e B_B r \frac{\eta B_B}{2} = 0.$$

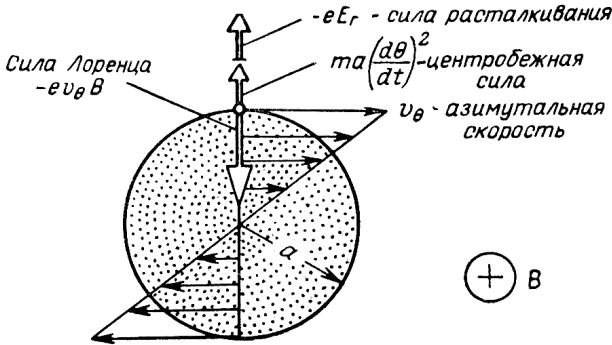


Рис. 8.13. Баланс сил в потоке Бриллюэна

Отсюда $\partial U / \partial r = \eta B_B^2 r / 4$ и можно найти распределение потенциала внутри пучка

$$U(r, z > z_c) = U_{\min} + \frac{\eta B_B^2 r^2}{8}. \quad (8.7)$$

Плотность заряда в потоке определяется из уравнения Пуассона

$$\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = -\frac{\epsilon_0 \eta}{2} B_B^2 = \text{const}.$$

Чтобы найти распределение плотности тока, надо знать продольные скорости частиц в потоке v_z . Для любой частицы имеем

$$v_\theta^2 + v_z^2 = 2\eta U(r),$$

$$v_z^2 = 2\eta \left(U_{\min} + \frac{\eta B_B^2 r^2}{8} \right) - \left(r \frac{\eta B_B}{2} \right)^2 = 2\eta U_{\min} = \text{const},$$

т.е. все электроны потока имеют одинаковую скорость поступательного движения $v_z = \sqrt{2\eta U_{\min}}$, что и оправдывает появление U_{\min} в уравнении (8.3). Потенциал внутри потока по мере отхода от оси увеличивается квадратично (8.7), но растет также линейная скорость вращения, и энергия вращения точно компенсирует разницу между полной энергией (определяемой потенциалом) и энергией поступательного движения.

Из постоянства плотности заряда ρ и поступательной скорости v_z следует также постоянство плотности тока по сечению потока $j = \rho v_z = \text{const}$. Полный ток в потоке Бриллюэна равен

$$I_B = \pi r_B^2 j = \frac{\pi \epsilon_0 \eta^{3/2}}{\sqrt{2}} B_B^2 r_B^2 \sqrt{U_{\min}}. \quad (8.8)$$

В это выражение входит значение U_{\min} , которое нам неизвестно, и его необходимо выразить через доступные прямому измерению величины. Пусть поток Бриллюэна радиуса r_B находится внутри трубы радиуса $r_0 > r_B$ с потенциалом U_0 . Распределение потенциала внутри пучка дается формулой (8.7), распределение потенциала между пучком и трубой найдем с помощью теоремы Гаусса

$$\begin{aligned} U(r_B \leq r \leq r_0) &= U_0 - \frac{I_B}{2\pi\epsilon_0\sqrt{2\eta U_{\min}}} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) = \\ &= U_0 - \frac{\eta B_B^2 r_B^2}{4} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right). \end{aligned}$$

На границе пучка это выражение и (8.7) должны совпадать, что позволяет найти U_{\min} в виде

$$U_{\min} = U_0 - \frac{\eta B_B^2 r_B^2}{8} \left[1 + 2 \ln\left(\frac{r_0}{r_B}\right) \right],$$

и мы можем переписать выражение (8.8) для тока через известные величины:

$$I_B = \frac{8\pi\epsilon_0\sqrt{\eta}}{\sqrt{2}} \frac{\eta B_B^2 r_B^2}{8} \sqrt{U_0 - \frac{\eta B_B^2 r_B^2}{8} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r_0}{r_B} \right) \right]}. \quad (8.9)$$

Из этого выражения видно, что существует значение бриллюэновского поля, которое обеспечивает максимальный ток при заданных величинах U_0 и r_B . Вводя комбинацию переменных $\xi = \eta B_B^2 r_B^2 / 8$ и дифференцируя (8.9) по ξ , находим

$$\frac{\eta \tilde{B}_B^2 r_B^2}{8} = \frac{2}{3} U_0 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r_0}{r_B} \right) \right]^{-1},$$

где \tilde{B}_B отвечает максимальному току. Допустим, что поток практически заполняет трубу $r_B \approx r_0$, тогда

$$\tilde{B}_B = \frac{4U_0^{1/2}}{r_B\sqrt{3}\eta} = 168 \frac{U_0^{1/2}}{r_B}, \quad I_{B,\max} = \frac{16\pi\epsilon_0\sqrt{\eta}}{3\sqrt{6}} U_0^{3/2} = 25,4 \cdot 10^{-6} U_0^{3/2}, \quad (8.10)$$

где при получении числовых величин использовались единицы: сантиметры, амперы, вольты, гауссы (см, А, В, Гс). Нам уже известно одно ограничение тока в цилиндрическом потоке, вызванное образованием виртуального катода. Сравнивая выражения (7.4) и (8.10), убеждаемся, что режим с максимальным током Бриллюэна наступает раньше и режим ВК этому не мешает. Заметим попутно, что при максимальном токе потенциал на оси $U_{\min} = U_0/3$ и вращательная скорость граничной частицы в $\sqrt{2}$ раз больше общей для всех частиц потока скорости поступательного движения.

Итак, поток Бриллюэна имеет следующие свойства:

- 1) постоянный радиус $r_B = \text{const}$;
- 2) аксиальная скорость частиц, плотность объемного заряда и плотность тока одинаковы в любой точке потока;
- 3) поток вращается как целое вокруг оси z с угловой скоростью $\dot{\theta} = \eta B_B / 2$;

4) в каждой точке потока сила Лоренца точно компенсирует центробежную и кулоновскую силы;

5) на входе в зону однородного поля необходимо обеспечить условия $r(z_c) = r_B$, $r'(z_c) = 0$.

Кроме того, фазовый объем потока предполагается равным нулю, и в нем отсутствуют ионы остаточного газа.

Поля выше бриллюэновских и частично экранированный катод

Посмотрим, что будет с потоком, рассчитанным на бриллюэновское поле B_B , если его поместить в более сильное поле $B_c > B_B$. Граничная частица пересечет больше чем надо силовых линий, сила Лоренца окажется больше требуемой, и появятся пульсации потока вокруг $r_{b0} < r_B$, но не превышающие r_B . Поток в зоне однородности станет пульсирующим, но все пульсации будут направлены внутрь пучка. Кроме того, в более сильном магнитном поле стабильность потока возрастает и он становится намного более устойчивым по сравнению с хрупким бриллюэновским режимом.

При наличии поля на катоде $B_{ct} \neq 0$ свойства потока заметно меняются. Особенно эффективным оказывается случай так называемого магнитного сопровождения, когда силовые линии магнитного поля в области катода пушки совпадают с траекториями электронов. При этом магнитное поле не действует на «правильные» электроны, но эффективно подавляет отклонившиеся вбок. Стабильность потока в зоне пушки сильно возрастает. У входа в анод линза-диафрагма несколько расфокусирует поток, он пересечет силовые линии магнитного поля и приобретет азимутальные скорости. При дальнейшем движении сила Лоренца растет, где-то она становится равной центробежной и кулоновской силам. Если начиная с этого места сделать поле однородным, то далее можно получить режим с постоянным радиусом (8.6).

Предположим, имеются два потока с одинаковыми параметрами r_{b0} , I , U_{\min} и первый находится в режиме Бриллюэна, а второй имеет поле на катоде $B_{ct} \neq 0$, $K \neq 0$. Поле в однородной зоне у первого потока B_B , а у второго – $B_c = B_B / (1 - K)^{1/2} > B_B$. Если электроны обоих потоков получают одинаковые поперечные возмущения, то в более сильном поле они будут подавлены более эффективно. При наличии

поля на катоде возрастает стабильность потока не только в зоне пушки, ио и в области однородного поля.

Выше отмечалось, что для реализации равновесного режима необходимо в однородную зону ($z = z_c$) войти с соблюдением условий $R = 1$, $R' = 0$. Допустим, мы ошиблись и на самом деле при $z = z_c$ имеем $R = 1 + \delta_0$, $R' = \delta'_0$, где обе ошибки малы. Принимая в первом порядке $1/R \approx 1 - \delta$, $1/R^3 \approx 1 - 3\delta$ и линеаризуя уравнение (8.5), находим

$$\frac{d^2\delta}{ds^2} + 2\alpha(1+K)\delta = 0 \quad \rightarrow \quad \delta(s) = A_0 \cos\left(\sqrt{2\alpha(1+K)}s + \varphi_0\right), \quad (8.11)$$

$$A_0 = \sqrt{\delta_0^2 + \frac{\delta_0'^2}{2\alpha(1+K)}}, \quad \varphi_0 = -\arctan\left(\frac{\delta_0'}{\delta_0\sqrt{2\alpha(1+K)}}\right).$$

Из выражения для A_0 видно, что при $K \neq 0$ амплитуда ошибки меньше, чем при $K = 0$.

Движение одной частицы в однородном магнитном поле B_c было рассмотрено в параграфе 2.5. Там было показано, что циклотронная длина волны (шаг ларморовской спирали) равна $\lambda_c = 2\pi v_z / \omega_c = 4\pi\sqrt{U} / (\sqrt{2\eta}B_c)$. Для потока, как это следует из (8.11), длина волны равна $\lambda_b = 2\pi r_{b0} / \sqrt{2\alpha(1+K)}$. Выражая r_{b0} через α из (8.4) и деля на λ_c , находим

$$\frac{\lambda_b}{\lambda_c} = \sqrt{\frac{2}{1+K}}.$$

При $K = 1$ получаем $\lambda_b = \lambda_c$, а для потока Бриллюэна $K = 0$ и $\lambda_b = \sqrt{2}\lambda_c$.

Угловая скорость частиц потока может быть приближенно выражена через параметр катодных условий:

$$\dot{\theta} = \frac{\eta B_c}{2} \left[1 - \frac{B_{ct}}{B_c} \left(\frac{r_{ct}}{r_b} \right)^2 \right] = \frac{\eta B_c}{2} \left[1 - \sqrt{K} \left(\frac{r_{b0}}{r_b} \right)^2 \right]_{r_b \approx r_{b0}} \approx \frac{\eta B_c}{2} (1 - \sqrt{K}).$$

Найдем угол θ_λ , на который повернется поток за один период пульсации λ_b :

$$\theta_\lambda = \frac{\lambda_b}{v_z} \dot{\theta} = \frac{2\pi \lambda_b}{\omega_c \lambda_c} \dot{\theta} \approx \sqrt{2\pi} \frac{1 - \sqrt{K}}{\sqrt{1 + K}}.$$

Для потока Бриллюэна $\theta_\lambda = \sqrt{2\pi}$, с ростом K угол θ_λ уменьшается (рис. 8.14). Можно показать, что при одинаковом равновесном радиусе r_{b0} средняя вращательная скорость электронов при частично экранированном катоде значительно меньше, чем в режиме Бриллюэна. На вращательную степень свободы приходится меньшая доля энергии, вследствие провисания потенциала поступательная скорость внутренних электронов будет меньше, чем наружных, и поток оказывается не-ламинарным.

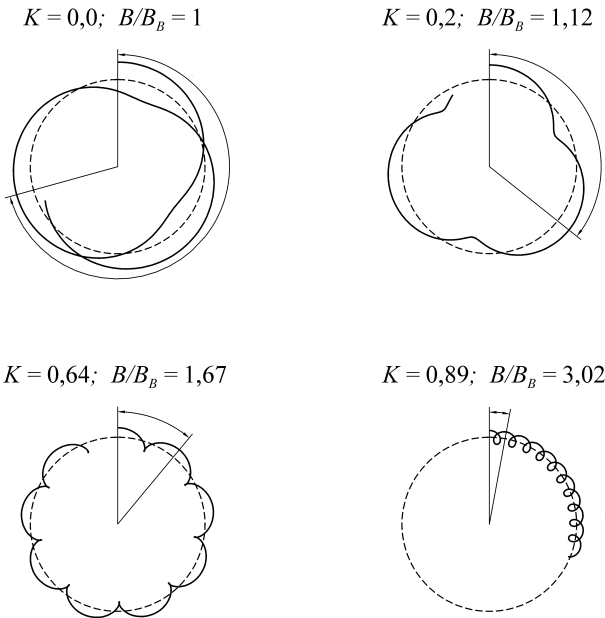


Рис. 8.14. Поперечные проекции электронных траекторий для потока Бриллюэна ($K = 0$) и для потоков с частично экранированным катодом ($K \neq 0$)

Поток с магнитным полем на катоде ($B_{ct} \neq 0$) оказывается существенно более стабильным, чем поток Бриллюэна, и обладает следующими свойствами.

1. Выходящий из пушки электронный поток имеет резко очерченные границы за счет подавления тепловых скоростей электронов магнитным полем. Особенно благоприятно сказывается магнитное сопроводение – совмещение в пределах пушки магнитных силовых линий с ходом траекторий электронов.

2. Наличие поля на катоде делает прибор менее чувствительным к погрешностям величин питающих напряжений и сборки.

3. Можно получить поток со значительной сходимостью при большой плотности.

4. Сформированный поток менее чувствителен к изменению пространственного заряда, вызванного присутствием ионов.

Задания

8.1. Найти время пролета эмитированного электрона в плоском диоде от катода до анода. Расстояние между катодом и анодом d , разность потенциалов U . Начальной тепловой скоростью пренебречь. Сравнить со случаем плоского конденсатора.

8.2. Получить формулу для равновесного радиуса r_{b0} пучка в магнитном поле в случае частично экранированного катода в зависимости от радиуса Бриллюэна r_B , магнитных полей в системе и на катоде B_c и B_{ct} , и радиуса катода r_{ct} .

8.3. Насколько уменьшится действующая на крайние электроны пучка в магнитном поле фокусирующая сила Лоренца при переходе от режима Бриллюэна ($K = 0$) к неэкранированному катоду ($K \approx 1$) при условии неизменности равновесного радиуса r_{b0} ?

9. ИСТОЧНИКИ ИОНОВ С ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ

9.1. Некоторые сведения из физики плазмы

Плазма – это квазинейтральная среда, состоящая из заряженных и нейтральных частиц. Такой средой может быть существующая в атмосфере пульсаров *электрон-позитронная* плазма, в которой положительный заряд несут позитроны, или *электронно-дырочная* плазма в полупроводниках. Однако наиболее распространена *электрон-ионная* плазма, которой является частично или полностью ионизованный газ; в дальнейшем мы будем рассматривать только такую плазму.

Квазинейтральность означает, что количество положительных и отрицательных зарядов в единице объема практически одинаково. Математически условие квазинейтральности можно записать как

$$e \sum Z_i n_i - e n_e = 0, \quad (9.1)$$

где n_e – плотность электронной компоненты плазмы; Z_i – заряды ионов; n_i – плотности ионов, сумма берется по всем зарядовым состояниям ионов.

Очень важным свойством плазмы является ее способность экранировать электрическое поле. Так, если поместить в плазму какой-либо пробный заряд, то противоположные по знаку заряженные компоненты плазмы будут притягиваться к нему, а компоненты того же знака – отталкиваться. В итоге электрическое поле будет убывать с расстоянием не по степенному закону, а экспоненциально. Расстояние, на котором поле спадает в e раз, определяет пространственный масштаб проникновения поля в плазму и называется длиной экранирования, или дебаевской длиной в честь П. Дебая, который впервые

обнаружил и изучил это явление. Дебаевская длина выражается формулой

$$\lambda_D^2 = \varepsilon_0 k T_e / e^2 n_e,$$

если электронная температура плазмы T_e много больше ионной температуры.

Дебаевская длина оказывается тесно связана с условием квазинейтральности (9.1). Это условие должно выполняться внутри плазмы с очень высокой точностью, поскольку в противном случае сразу же возникли бы сильные электрические поля, восстанавливающие квазинейтральность. Однако если размеры рассматриваемой области меньше дебаевской длины, то условие квазинейтральности может нарушаться. Также это условие нарушается на границе плазмы, в слое толщиной порядка дебаевской длины. Отсюда можно сделать вывод, что в плазме, в отличие от других систем заряженных частиц, длина дебаевского экранирования должна быть мала по сравнению с ее характерным размером. Этот критерий означает, что взаимодействия, происходящие внутри плазмы, более значительны по сравнению с эффектами на ее поверхности, которыми можно пренебречь.

Наиболее важными параметрами плазмы являются ее *плотность, степень ионизации и температура*.

Обычно плотность плазмы измеряют числом электронов в 1 см^3 . Для большинства ионных источников плотность плазмы колеблется в диапазоне $10^{10} \dots 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Для сравнения: плотность газа при нормальных температуре и давлении составляет $2,687 \cdot 10^{19}$ молекул/ см^3 , плотность газа в вакуумной камере при давлении 10^{-6} мм рт. ст. составляет $3,3 \cdot 10^{10}$ молекул/ см^3 .

Температуру плазмы обычно выражают в электронвольтах:

$$1 \text{ эВ} = 11\,600 \text{ К.}$$

Плазму подразделяют на высокотемпературную ($T > 10$ эВ) и низкотемпературную ($T < 10$ эВ); это деление отражает тот факт, что высокотемпературная водородная плазма является полностью ионизованной, тогда как в низкотемпературной плазме необходимо учитывать наличие нейтральных частиц.

Ионизация нейтральных атомов для формирования плазмы может быть осуществлена посредством нескольких процессов, включающих, например, поверхностную ионизацию, фотоионизацию, ионизацию

полем. Более широко применяется ионизация газа посредством электронного удара. Этот способ ионизации является доминирующим процессом фактически во всех плазменных ионных источниках, в которых рабочий материал вводится в виде газа. В таком случае энергия, поступающая в плазму от источника питания, передается в основном электронам. В дальнейшем энергичные электроны ионизируют остаточный газ при соударениях с нейтральными атомами.

Ионизация будет происходить, если энергия ударяющего электрона больше энергии, необходимой для удаления связанного электрона:

$$W_e > e\phi_i,$$

где ϕ_i – первый ионизационный потенциал рассматриваемого вида атомов. Важно помнить, однако, что электроны в плазме не монохроматичны, а имеют распределение по энергиям, определяемое электронной температурой T_e . Более того, вероятность ионизации нейтрального атома при соударении с электроном зависит от энергии электрона. Максимум вероятности достигается при энергии, приблизительно равной трем-четырем потенциалам ионизации. Соответственно, в процессе ионизации гораздо выгоднее многократно использовать одни и те же высокоэнергетичные электроны, а не вновь ускорять электроны, выбитые из нейтральных атомов.

9.2. Извлечение из плазмы заряженных частиц и начальное формирование пучков

При образовании плазмы внутри металлического объема электроны, поскольку они обладают большей подвижностью, чем ионы, быстрее достигают соприкасающихся с плазмой стенок. Накапливающийся на этих стенках отрицательный заряд притягивает из плазмы положительные ионы, которые образуют вблизи стенки слой положительного объемного заряда порядка дебаевской длины. Важным свойством этого слоя является экранировка им плазмы от стенок и электродов. В самой плазме не может поддерживаться градиент потенциала, а в экранирующем слое может, соответственно любая разность потенциала между плазмой и физической поверхностью локализуется в этом слое.

Внешнее электрическое поле, приложенное к плазме, также проникает в нее только на длину экранирования. Компенсация поля в этом

случае происходит из-за перераспределения локальной плотности заряженных частиц в поверхностном слое плазмы, называемом плазменной оболочкой.

При использовании плазмы в качестве источника заряженных частиц в прилегающей к ней стенке камеры делается выходное отверстие, радиус которого обычно заметно превосходит расстояние между плазмой и стенкой. Если не принимать никаких специальных мер, то плазма выйдет из источника наружу в вакуум и ее граница в области отверстия будет иметь выпуклую форму. Однако подбором геометрии электродов и использованием достаточно сильных ускоряющих электрических полей можно не только вернуть границу плазмы на прежнее место, которое она занимала до образования выходного отверстия (т.е. примерно в плоскость стенки), но и создать вогнутую сферическую поверхность внутри источника. На рис. 9.1 показаны три способа отбора заряженных частиц, каждый из которых отвечает определенной форме эмитирующей поверхности плазмы и, следовательно, определенной конструкции плазменной пушки.

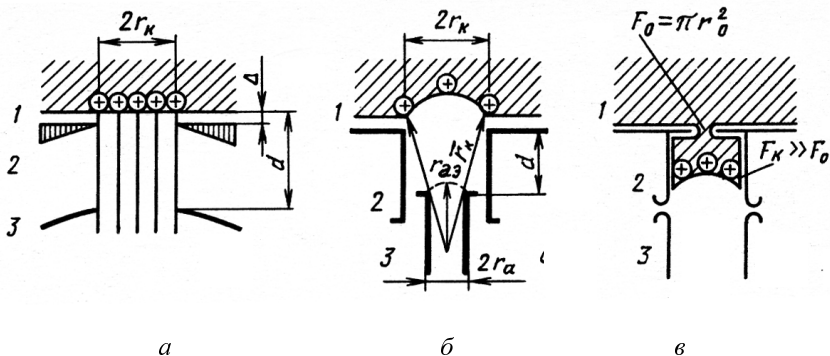


Рис. 9.1. Извлечение ионов из плазменных источников:

- 1 – граница плазмы; 2 – стенка источника и фокусирующие электроды;
 3 – извлекающие электроды

Создание ионных источников с высокой (до 100 A/cm^2) плотностью тока эмиссии требует получения плазмы с большой степенью ионизации и значениями плотности до $10^{13} \dots 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Но и этого недостаточно, так как отбор ионов обычно производится с той части поверхности плазмы, которая составляет десятые доли процента от всей

поверхности плазмы. Для повышения эффективности в современных источниках идут двумя путями: создавая неоднородную плазму (более концентрированную в области эмиттера) и увеличивая поверхность эмиттера. Часто, особенно в случаях использования плазменного эмиттера большой площади, применяются сеточные электроды с крупными круглыми или щелевыми отверстиями. Дальнейшее формирование ионного пучка осуществляется системой фокусирующих и ускоряющих электродов.

Видно, что моделирование и создание надежных источников ионов оказывается делом более сложным, нежели создание электронных пушек с твердым катодом. Необходимо как найти положение и форму плазменного эмиттера, так и рассчитать динамику ионного пучка с большим эмиттансом и первеансом в сложной системе электродов.

9.3. Некоторые типы источников ионов

Дуоплазматрон

Дуоплазматрон, предложенный немецким физиком М. фон Арденне, является членом семейства плазматронов (буквально – генераторов плазмы), в которых дуговой разряд горит между катодом и анодом, а плазма извлекается из отверстия в аноде. Главной особенностью дуоплазматрона является наличие между катодом и анодом промежуточного электрода с узким каналом. Промежуточный электрод и анод используются в качестве полюсных наконечников для создания между ними сильного магнитного поля (порядка нескольких килогаусс), обеспечивающего магнитное сжатие плазмы у выходного отверстия источника. Благодаря сжатию плазмы достигается высокая плотность ионного пучка. Дуоплазматрон отличается высокой степенью ионизации рабочего газа, высокой газовой эффективностью, большим энергетическим КПД и может работать с различными газами.

Принцип действия дуоплазматрона заключается в следующем. Рабочий газ подается между катодом 2 и промежуточным электродом 12 (рис. 9.2). В этом промежутке зажигается дуговой разряд, который поддерживается при довольно высоком давлении (примерно 10^{-2} мм рт. ст.) и низком напряжении (примерно 50 В). Между промежуточным электродом и анодом 11 задается более высокое

напряжение (примерно 150 В), давление же гораздо ниже (примерно 10^{-3} мм рт. ст.). При этих условиях вдоль канала возникает градиент потенциала, достаточный для ускорения электронов до энергии ионизации. Если длина канала промежуточного электрода заметно больше длины свободного пробега электрона, то в канале образуется плазма со значительно более высокой плотностью, чем вне канала.

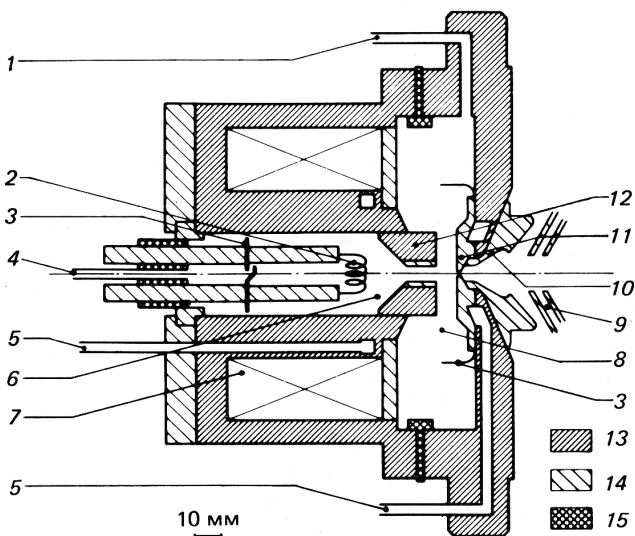


Рис. 9.2. Дуоплазматрон с расширительной чашей:

- 1 – вход второго газа; 2 – катодная нить; 3 – защита от пара;
- 4 – вход газа; 5 – водоохлаждение; 6 – катодная камера;
- 7 – магнитная катушка; 8 – анодная камера; 9 – вытягивающая система;
- 10 – расширительная чаша; 11 – анод; 12 – промежуточный электрод;
- 13 – ферромагнитный металл; 14 – неферромагнитный металл; 15 – изолятор

Применение неоднородного магнитного поля на участке промежуточный электрод–анод приводит к магнитному сжатию выходящей из канала плазмы (рис. 9.3) и, следовательно, к дальнейшему повышению ее плотности. В результате у выходного отверстия дуоплазматрона концентрация заряженных частиц достигает величин $10^{14} \dots 10^{15}$ см⁻³, что позволяет отбирать ионные токи с плотностью до 100 А/см².

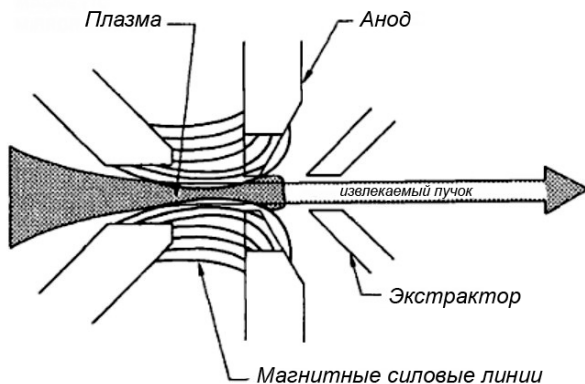


Рис. 9.3. Сжатие плазмы в канале дуоплазматрона и ее извлечение

Выходное отверстие дуоплазматрона часто снабжают расширительной чашей (см. рис. 9.2, 10), в которой плазма расширяется и соответственно охлаждается. Увеличение поверхности плазмы позволяет увеличить отбираемый ток, а охлаждение способствует уменьшению эмиттанса пучка.

Источник с осциллирующей электроном (источник Кауфмана)

Один из способов эффективного использования электронов для ионизации газа при низком давлении заключается в удлинении пути, проходимом ими в разрядном промежутке, и, следовательно, в увеличении числа актов ионизации. Наиболее успешно явление осцилляции можно реализовать в продольном магнитном поле. На рис. 9.4 приведена схема такого источника. Его особенностью является наличие изолированного от всех электродов отражателя 3, на котором в рабочем состоянии автоматически устанавливается отрицательный по отношению к катоду потенциал порядка 10 В.

На участке катод–анод вылетевшие из катода электроны ускоряются анодным напряжением и приобретают необходимую для ионизации газа энергию. В полости анода, заполненной плазмой, часть электронов в результате взаимодействия с этой плазмой теряет свою энергию и превращается в тепловые электроны плазмы. Другая часть электронов,

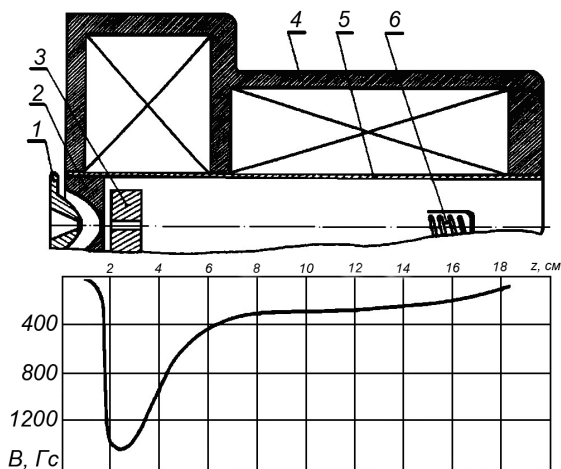


Рис. 9.4. Ионный источник с осцилляцией электронов:
 1, 2 – вытягивающая система; 3 – отражатель; 4 – магнитная система; 5 – анод; 6 – катодная нить

прошедшая плазму с минимальными потерями, тормозится на участке отражатель–анод, меняет направление движения на обратное, вторично проходит полость анода и увеличивает ионизацию газа. Продольное магнитное поле не только препятствует радиальному перемещению электронов, но и способствует осцилляции электронов, поскольку создает в зоне отражателя эффект магнитной пробки. Электроды 1 и 2 образуют систему Пирса для извлечения ионов.

Источник Пеннинга

Термокатод нередко ограничивает продолжительность непрерывной работы источника и величину разрядного тока. Поэтому иногда для получения ионов и электронов используются разряды, не требующие накаливаемого катода. К числу таких относится разряд в магнитном поле, впервые примененный Ф. Пеннингом в качестве источника ионов.

Разрядная система Пеннинга имеет два противостоящих холодных катода и расположенный между ними кольцевой или цилиндрический анод (рис. 9.5). Для нормальной работы она требует магнитное поле, которое обычно создается между катодами – полюсными наконечниками.

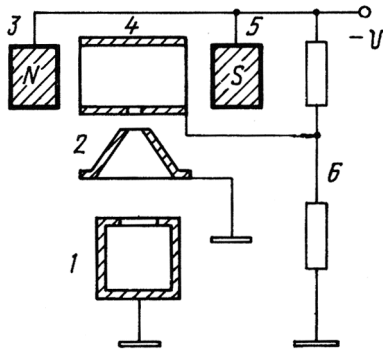


Рис. 9.5. Источник Пеннинга:

1 – коллектор ионов; 2 – вытягивающий электрод; 3, 5 – холодные катоды (полосные наконечники); 4 – анод с выходным отверстием; 6 – делитель напряжения

Вывод частиц из плазмы осуществляется через выходное отверстие или продольную щель в боковой стенке ввода при помощи извлекающего экстрактора. При подаче на электроды напряжения, превышающего напряжение зажигания, в заполненном газом при низком давлении междуэлектродном пространстве возникает самостоятельный разряд. Падение напряжения на разряде зависит от ионизационной способности электронов и условий газовой среды, от геометрии разряда и напряженности магнитного поля, а также от вторично-эмиссионных свойств катода. Рациональным подбором материала катода можно снизить потенциал горения разряда. Обычные материалы катода – алюминий, магний, бериллий, железо с потенциалом горения 350...400 В.

Высокочастотный источник

Ионизация рабочего газа в высокочастотных источниках ионов осуществляется при помощи высокочастотного разряда, идущего при низком давлении. Основными преимуществами ВЧ-источников являются стабильность работы и большой срок службы, в отличие от источников с дуговым разрядом, имеющих недолговечные накаливаемые катоды, или источников с холодным катодом, которые выходят из строя вследствие эрозии электродов. Малый расход газа и небольшая

удельная потребляемая мощность позволяют использовать их в непрерывном режиме.

Конструкция ВЧ-источника небольшой мощности показана на рис. 9.6. Основу этого источника составляет стеклянная колба, одним концом через узкий перешеек соединенная с газопроводом, а вторым концом через узкий канал ускоряющего электрода – с вакуумной камерой, в которую выводится сформированный ионный пучок. Для получения высокочастотного разряда источник помещается внутри катушки колебательного контура, подключенного к высокочастотному генератору, типичная частота колебаний составляет 20...100 МГц. Безэлектродный разряд вызывается действием высокочастотного электромагнитного поля на свободные электроны в разрядной колбе. Для вывода пучка на извлекающий электрод 4 подается высокий отрицательный потенциал относительно электрода 1.

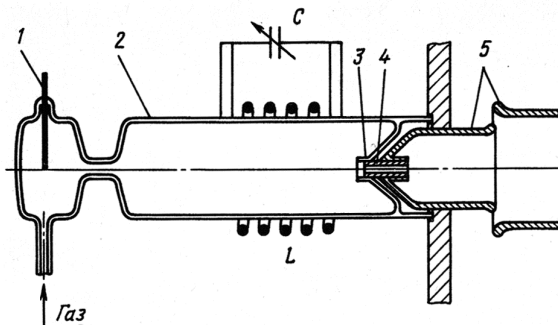


Рис. 9.6. ВЧ-источник:

1 – электрод; 2 – колба; 3 – экран; 4 – извлекающий электрод; 5 – ускоряющая система

В Институте ядерной физики (Новосибирск) для целей диагностики и нагрева плазмы был разработан ряд мощных ионных ВЧ-источников. На рис. 9.7 показана конструкция нагревного источника с током до 40 А, энергией частиц пучка до 40 кэВ и длительностью импульса до 1 с. Многовитковая катушка 3 передает в плазму до 50 кВт ВЧ-мощности на частоте порядка 4 МГц, поддерживая высокочастотный разряд в камере 2. Для извлечения ионов из плазмы и формирования ионного пучка используется набор из трех сеток 4. Соосно расположенные в сетках отверстия диаметром 4 мм формируют набор

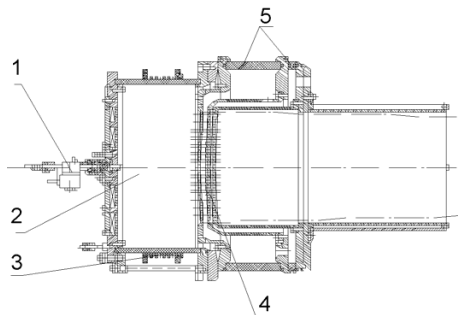


Рис. 9.7. Мощный ВЧ-источник:

1 – вход газа; 2 – разрядная камера;
3 – ВЧ-катушка; 4 – сетки; 5 – изоляторы

элементарных ячеек, геометрия которых оптимизирована для получения минимальной угловой расходимости пучка. Для обеспечения надлежащей фокусировки пучка сетки изготовлены вогнутыми с радиусом кривизны 4 м.

Ионные источники на электронном циклотронном резонансе

В ЭЦР-источнике образование многозарядных ионов происходит в зеркальной магнитной ловушке (ловушке Будкера). Наличие магнитного поля позволяет организовать нагрев только электронного компонента плазмы при помощи электронно-циклотронного резонанса, для чего в плазму вводится электромагнитная волна с частотой, равной циклотронной частоте электронов в магнитном поле. Температура ионов при этом остается низкой, что обеспечивает малый эмиттанс извлекаемого ионного пучка. Запертые в ловушке электроны многократно пролетают через систему, что способствует эффективной генерации многозарядных ионов.

В плотной плазме существуют очень сильные потери многозарядных ионов вследствие их перезарядки с нейтральными атомами. Поэтому для лучшей генерации пучков многозарядных ионов некоторые ЭЦР-источники делают двухступенчатыми (см. пример на рис. 9.8). Первая ступень – это генератор холодной плазмы, действующий при повышенном (порядка $10^{-2} - 10^{-3}$ мм рт. ст.) давлении. Плазма из первой ступени по линиям магнитного поля распространяется во вторую ступень

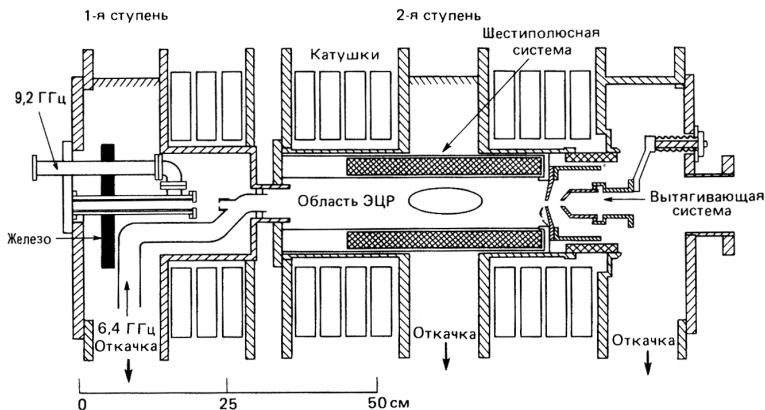


Рис. 9.8. Двухступенчатый ЭЦР-источник

(с давлением порядка 10^{-7} мм рт. ст.), в которой и происходит основной нагрев плазмы электронами. Типичная частота вводимой волны составляет несколько гигагерц. Покидающие ловушку вдоль оси системы ионы ускоряются и образуют ионный пучок.

Ионные источники с электронным пучком

Еще одним типом источников высокозарядных ионов являются ионные источники с электронным пучком. Глубокая обдирка ионов в этом источнике происходит в результате длительного (сотни миллисекунд) взаимодействия изначально низкозарядных ионов с интенсивным электронным пучком с энергией в несколько десятков килоэлектронвольт и плотностью тока до 1000 А/см^2 . Это взаимодействие происходит в длинном дрейфовом промежутке между электронной пушкой и коллектором электронов, электронный пучок в этом промежутке погружен в сильное сопровождающее магнитное поле (рис. 9.9). Объемный заряд электронного пучка, образуя потенциальную яму, притягивает инжектируемые низкозарядные ионы. Для удержания ионов внутри электронного пучка в продольном направлении осуществляют подъем потенциала на крайних секциях дрейфовой трубки. Оказывается, что степень обдирки ионов весьма точно определяется временем взаимодействия. После окончания взаимодействия потенциальный барьер на конце дрейфовой трубки убирают и ионы вылетают вдоль оси системы.

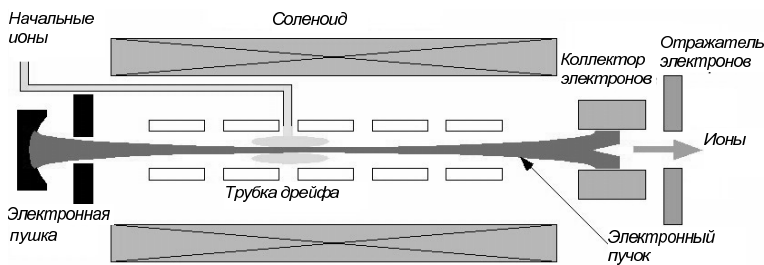


Рис. 9.9. Источник ионов с электронным пучком

Кроме высокоэффективного получения высокозарядных ионов, ионные источники с электронным пучком отличаются высокой стабильностью работы (точность повторения тока от импульса к импульсу) и малый эмиттанс создаваемого ионного пучка.

9.4. Источники электронов с плазменным эмиттером

В настоящее время источниками электронных пучков в подавляющем большинстве случаев являются термоэмиссионные твердотельные катоды. Между тем у термокатодов есть свои ограничения – относительно небольшая предельная плотность тока эмиссии, ограниченная способность к импульсной эмиссии, высокая чувствительность к условиям вакуума.

Граница плазмы, эмиссия ионов с которой была рассмотрена выше, также может служить и в качестве эмиттера электронов. По сравнению с термокатодами плазменные эмиттеры электронов обладают рядом преимуществ. Это, прежде всего, более высокая плотность эмиссионного тока, возможность импульсной эмиссии, способность к работе в области повышенных давлений газа (вплоть до форвакуумного диапазона – 10...100 мторр), нечувствительность к присутствию в остаточной газовой атмосфере агрессивных сред. Основными недостатками плазменных эмиттеров электронов по сравнению с термокатодами являются высокий эмиттанс получаемого электронного пучка, обусловленный более высокой температурой электронов в плазме, и большая сложность эксплуатации.

Использование для создания плазмы накаливаемых катодов может свести на нет преимущества плазменной эмиссии электронов. Кроме того, разряды, применяемые в плазменных источниках электронов, должны обеспечить при минимально возможном давлении генерацию плотной плазмы в локальной области отбора электронов. Наилучшим образом этим условиям соответствуют тлеющий разряд с полым катодом, разряд в скрещенных электрическом и магнитном полях (Пеннинга, магнетронный), дуговой разряд со сжатием плазмы в области эмиттера.

Как и в случае ионных источников, для извлечения электронов необходимо отверстие в разрядной камере и система извлекающих и ускоряющих электродов. Однако между процессами эмиссии из плазмы ионов и электронов есть и серьезные различия. Экранирующий слой плазмы, который образуется возле стенок камеры, не препятствует выходу из плазмы ионов, но для электронов создает потенциальный барьер. В отличие от термоэлектронной эмиссии, в случае которой высота барьера неизменна или слегка уменьшается вследствие эффекта Шоттки, в случае эмиссии из плазмы возможна сильная трансформация этого барьера вплоть до его полного исчезновения. При этом достигается максимальная эффективность извлечения электронов из плазмы – весь электронный компонент разрядного тока преобразуется в ток эмиссии. Поэтому плазма реагирует на эмиссию электронов существенным изменением своих параметров, главным образом возрастает ее потенциал относительно эмиссионного электрода. Это накладывает ограничения на максимальный размер площади эмиссионной плазменной границы. Наилучшие параметры эмиссии (величина тока, стабильность и управляемость) достигаются, когда эмиссионный электрод представляет собой сетку со многими ячейками, причем размер отдельной ячейки сравним с протяженностью экранирующего слоя плазмы.

На рис. 9.10 представлена конструкция плазменного источника сильноточного импульсного электронного пучка, который использует тлеющий разряд с полым катодом. Этот источник способен генерировать электронный пучок с током 1 кА, энергией электронов до 200 кэВ и длительностью до 100 мкс. Для отбора и ускорения электронов используется двухэлектродная многоапертурная система извлечения: в эмиссионном электроде и аноде выполнено 257 соосных отверстий диаметром 5,1 мм.

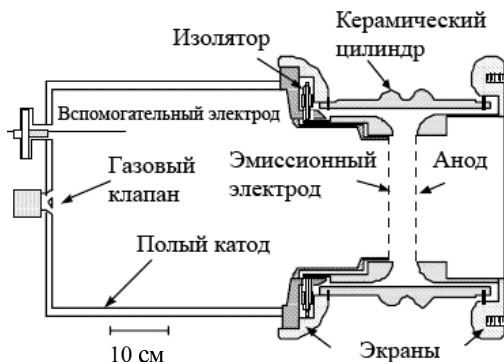


Рис. 9.10. Плазменный источник сильноточного импульсного электронного пучка

В настоящее время в Институте ядерной физики ведется разработка плазменного источника электронов для экспериментальной установки ГОЛ-3. Эта установка представляет собой длинную открытую многопробочную магнитную ловушку. С одного конца этой ловушки в нее инжектируется мощный электронный пучок, который нагревает плазму. В настоящее время при генерации электронного пучка используется взрывоэмиссионный катод, однако для дальнейшего повышения длительности пучка необходим источник с плазменным эмиттером. Основные параметры разрабатываемого источника: ток пучка – $1 \dots 10$ кА, длительность эмиссии – более 100 мкс, плотность тока эмиссии – до 40 А/см^2 , разность потенциалов катод–анод – $150 \dots 200$ кВ. Источник помещается в продольное магнитное поле с индукцией 1 кГс . Сформированный пучок необходимо ввести в ловушку с полем 50 кГс , причем в результате магнитного сжатия плотность тока в пучке достигнет $1 \dots 2 \text{ кА/см}^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 427 с.
2. *Голдстейн Г.* Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
3. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
4. *Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. – М.: Наука, 1972. – 224 с.
5. *Бенфорд А.* Транспортировка пучков заряженных частиц. – М.: Атомиздат, 1969. – 240 с.
6. *Кельман В.М., Явор С.Я.* Электронная оптика. – М.: Изд. АН СССР, 1963. – 362 с.
7. *Зинченко Н.С.* Курс лекций по электронной оптике. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1961. – 240 с.
8. *Мешков И.Н.* Введение в физику пучков заряженных частиц. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1988. – 92 с.
9. *Капчинский И.М.* Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. – М.: Атомиздат, 1982. – 310 с.
10. *Алямовский И.В.* Электронные пучки и электронные пушки. – М.: Сов. радио, 1966. – 456 с.
11. *Кириштейн П.Т., Кайно Г.С., Уотерс У.Е.* Формирование электронных пучков. – М.: Мир, 1970. – 600 с.
12. *Габович М.Д.* Физика и техника плазменных источников ионов. – М.: Атомиздат, 1972. – 304 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	3
1.1. Некоторые сведения из векторного анализа.....	3
1.2. Основные уравнения электромагнитного поля.....	9
1.3. Аналитические методы расчета электрического поля.....	15
1.4. Численные методы расчета электромагнитных полей.....	21
2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	31
2.1. Принцип наименьшего действия.....	31
2.2. Лагранжиан одиночной частицы, сила Лоренца.....	35
2.3. Энергия частицы в стационарном поле.....	37
2.4. Уравнения движения частицы в различных системах координат.....	40
2.5. Движение заряженной частицы в однородных стационарных полях.....	41
2.6. Движение заряженной частицы в слабо неоднородном магнитном поле.....	50
2.7. Аналогия между движением заряженных частиц и распространением света.....	56
3. ПОЛЯ С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ.....	60
3.1. Аксиально-симметричное электростатическое поле.....	60
3.2. Аксиально-симметричное магнитное поле.....	62
3.3. Теорема Буша.....	64
3.4. Параксиальные уравнения движения.....	68
4. ЛИНЗЫ В ОПТИКЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ.....	73
4.1. Некоторые сведения из теории дифференциальных уравнений.....	73
4.2. Матричное описание динамики частиц.....	75
4.3. Фокусирующие свойства линейных систем.....	77

4.4. Построение изображения в линзе.....	78
4.5. Аксиально-симметричные электростатические линзы.....	83
4.6. Аксиально-симметричные магнитные линзы.....	88
4.7. Магнитные линзы с азимутальным полем.....	91
4.8. Аберрации линз с симметрией вращения.....	94
4.9. Квадрупольные линзы.....	97
4.10. Дуплеты и триплеты квадрупольных линз.....	103
5. ПОТОКИ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ.....	108
5.1. Канонические уравнения Гамильтона, теорема Лиувилля.....	108
5.2. Поперечный фазовый объем и проблема согласования.....	113
5.3. Распределение пучка на фазовой плоскости.....	118
5.4. Среднеквадратичный эмиттанс.....	122
6. ДИНАМИКА ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С НЕНУЛЕВЫМ ЭМИТТАНСОМ.....	125
6.1. Расплывание пучка в свободном пространстве.....	125
6.2. Движение частицы в периодических полях. Уравнение Хилла и функции Флоке.....	127
6.3. Построение огибающей пучка в канале.....	136
6.4. Эффективный эмиттанс.....	139
6.5. Параметры Твисса.....	141
7. ПОТОКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ.....	145
7.1. Основные соотношения. Первеанс.....	145
7.2. Действие сил пространственного заряда.....	148
7.3. Расплывание потоков под действием сил пространственного заряда.....	150
7.4. Образование виртуальных катодов и предельный ток.....	156
7.5. Самофокусировка пучка заряженных частиц. Пинч-эффект.....	162
8. НАЧАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ.....	164
8.1. Термоэлектронная эмиссия.....	164
8.2. Плоский диод.....	166
8.3. Плоская пушка Пирса.....	171
8.4. Сферический диод.....	177
8.5. Сферическая пушка Пирса.....	179
8.6. Отличия реальных электронных пушек.....	180
8.7. Формирование интенсивных потоков магнитным полем.....	181

9. ИСТОЧНИКИ ИОНОВ С ПЛАЗМЕННЫМ ЭМИТТЕРОМ.	192
9.1. Некоторые сведения из физики плазмы.	192
9.2. Извлечение из плазмы заряженных частиц и начальное форми- рование пучков.	194
9.3. Некоторые типы источников ионов.	196
9.4. Источники электронов с плазменным эмиттером.	204
Библиографический список.....	207

Иванов Андрей Вячеславович

**ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
И ИНТЕНСИВНЫХ ПУЧКОВ В СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЯХ**

Учебное пособие

Редактор *Н.А. Лукашова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *В.Н. Зенина*

Подписано в печать 12.04.2011. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 12,32. Печ. л. 13,25. Изд. № 240/10. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20